



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

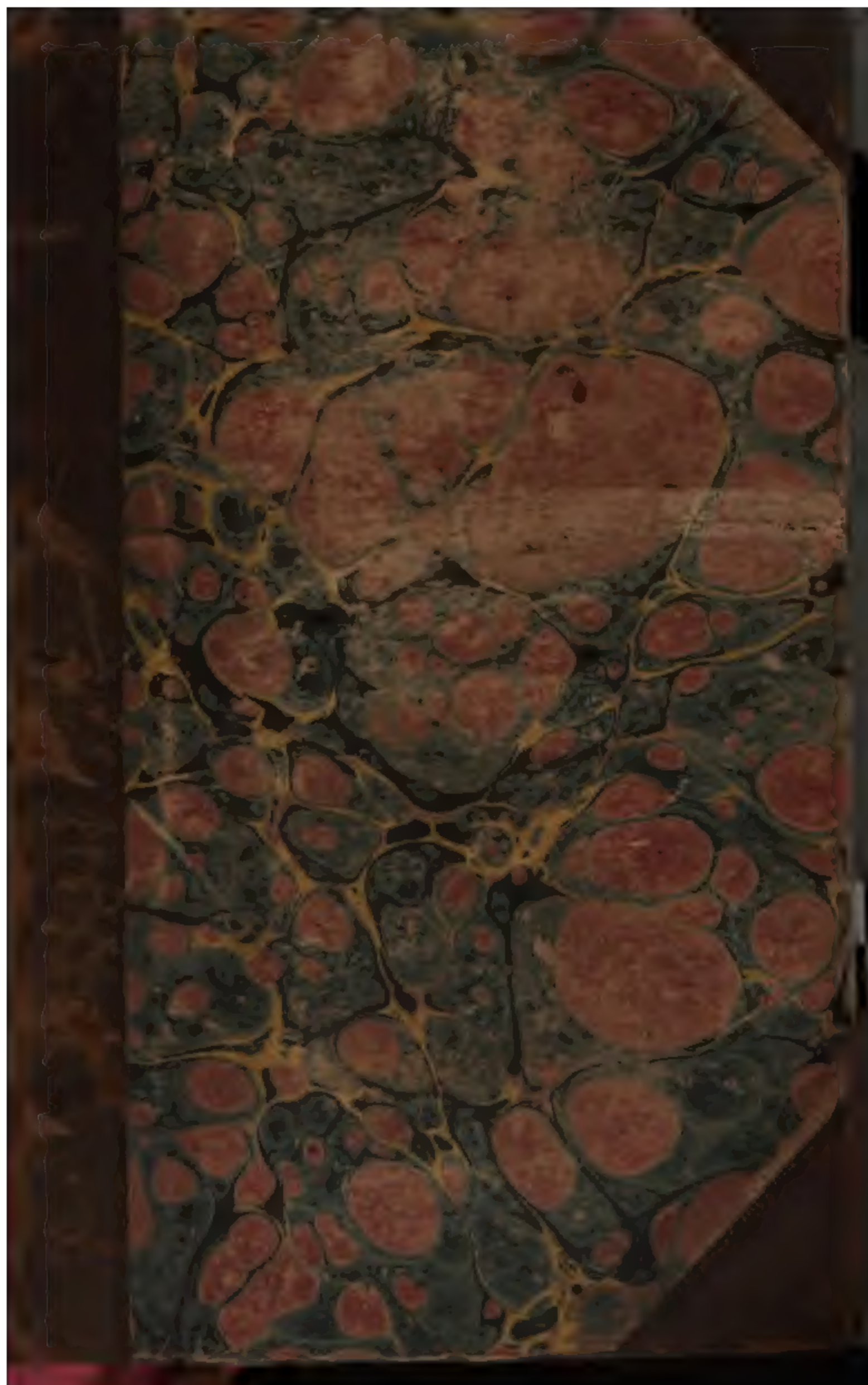
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

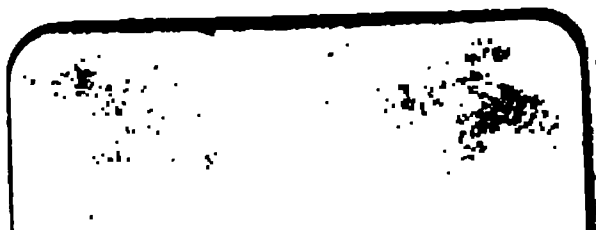
### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



33.

559.









**THÉORÈMES  
ET PROBLÈMES  
DE GÉOMÉTRIE.**

## Ouvrages du Baron REYNAUD.

- 1°. *Traité d'Arithmétique* à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, 5 fr.
- 2°. *Traité d'Arithmétique* à l'usage des Élèves qui se destinent aux Écoles royales Polytechnique, Militaire, de la Marine, et des Forêts (16<sup>e</sup> édit. 1832), 4 fr. 50 c.
- 3°. *Éléments d'Algèbre*, 8<sup>e</sup> édition, 1830, 7 fr. 50 c.
- 4°. *Cours de Mathématiques*, à l'usage des Élèves de la Marine, par MM. Reynaud et Nicollet; 3 vol. in-8, 1829.
  - 1<sup>er</sup> vol., Arithmétique et Algèbre, par M. Reynaud, 5 fr.
  - 2<sup>e</sup> vol., Géométrie et Trigonométrie, par M. Nicollet, 7 fr.
  - 3<sup>e</sup> vol., Statique (sous presse)/
- 5°. *Trigonométrie rectiligne et sphérique*, suivie des Tables de logarithmes de Lalande (3<sup>e</sup> édition), 3 fr.
- 6°. *Tables de logarithmes* (à sept décimales) pour les nombres et les lignes trigonométriques, in-12 (édition stéréotype) 1829, 3 fr. 50 c.
- 7°. *Traité d'Application de l'Algèbre à la Géométrie* (2<sup>e</sup> édit., sous presse).
- 8°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, in-4°, 10 fr.
- 9°. *Problèmes et développemens* sur les diverses parties des Mathématiques, 6 fr.
- 10°. *Traité élémentaire de Mathématiques et de Physique*, suivi de notions sur la Chimie et sur l'Astronomie, à l'usage des Élèves qui se préparent aux examens pour la Marine et pour le Baccalauréat ès-lettres, 2<sup>e</sup> édit., revue, corrigée et considérablement augmentée; 2 vol. in-8° avec 21 pl., 1832. (Chaque volume se vend séparément 7 fr.) 12 fr. 50 c.
- 11°. *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, suivis de la *théorie des plans*, et des *préliminaires de la Géométrie descriptive*, comprenant la partie exigée pour l'admission à l'École Polytechnique, 1833. 5 fr.
- 12°. *Éléments de Géométrie descriptive*, suivis de la *Perspective*, des *Ombres*, de la *Gnomonique*, etc. (Sous presse).
- 13°. *Traité d'Arpentage* de Lagrive, avec les Notes de Reynaud, 7 fr.

### Notes sur Bezout.

- 14°. *Arithmétique de Bezout*, avec les notes (15<sup>e</sup> édit. 1832), 3 fr. 50 c.
  - 15°. *Géométrie de Bezout*, avec des notes contenant un grand nombre de Problèmes, et des *Éléments de Géométrie descriptive* (7<sup>e</sup> édit.), 6 fr.
  - 16°. *Algèbre et Application de l'Algèbre à la Géométrie*, avec les notes, 6 fr.
- Les Notes sur l'Arithmétique, sur la Géométrie et sur l'Algèbre, se vendent séparément.

*Nota.* L'*Arithmétique* (16<sup>e</sup> édition), l'*Algèbre* (8<sup>e</sup> édition), l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie* (comprenant la *Trigonométrie*), et les Notes sur l'*Algèbre* et sur la *Géométrie* de Bezout, sont particulièrement destinées aux Élèves qui se proposent d'entrer à l'École royale Polytechnique et à l'École spéciale Militaire de Saint-Cyr. Ces ouvrages renferment les solutions des principales difficultés relatives aux examens.

# THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE,

SUIVIE

DE LA THÉORIE DES PLANS, ET DES PRÉLIMINAIRES  
DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

COMPRENANT

LA PARTIE EXIGÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE  
POLYTECHNIQUE,

A L'USAGE DES ÉLÈVES

Qui se destinent à l'École Polytechnique, à la Marine, à l'École Militaire  
de Saint-Cyr et à l'École Forestière;

PAR LE BARON REYNAUD,

Examinateur pour l'admission à ces Écoles, Chevalier de la Légion-d'Honneur, Docteur  
de la Faculté des Sciences, Membre de plusieurs Académies, etc.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.



PARIS,  
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
POUR LES MATHÉMATIQUES,  
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1833

559.



*Tout Exemplaire du présent Ouvrage qui ne portera pas, comme ci-dessous, la signature de l'Auteur et celle du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricateurs et les débitans de ces Exemplaires.*

*Reynaud*

*Bachelier*

*Se vend aussi :*

**A BORDEAUX,**

**CHEZ GASSIOT FILS AÎNÉ, LIBRAIRE,**

**FOSSÉS DE L'INTENDANCE, N° 61.**

# AVERTISSEMENT.

---

Cet Ouvrage , divisé en trois parties , est destiné à compléter la *Géométrie élémentaire* , à préparer les élèves au concours général et aux examens , en les exerçant sur un grand nombre de problèmes de *Géométrie* , à démontrer les différens principes qui servent de base à la *Géométrie descriptive* , et à faire connaître les élémens de cette science.

La première partie contient des théorèmes et des problèmes relatifs à des points et à des lignes qui sont dans un même plan.

La deuxième partie traite des propriétés générales des points , des lignes et des surfaces qui sont situés d'une manière quelconque dans l'espace ; on y trouve la démonstration de plusieurs principes qui serviront dans la *Géométrie descriptive*.

Dans la troisième partie , on expose les principes fondamentaux de la *Géométrie descriptive* , et l'on donne les solutions de problèmes élémentaires à l'aide desquels on pourra résoudre les questions les plus compliquées.

Lorsque les *données* et les *inconnues* sont dans un même plan, la *Géométrie élémentaire* fournit le moyen d'exécuter sur ce plan, les constructions qui conduisent à la solution de la question proposée. Mais, lorsqu'un problème conduit à considérer des points et des lignes situés d'une manière quelconque dans l'espace, il faut recourir à de nouvelles mé-

thodes qui constituent la partie des Mathématiques , nommée GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE , dont l'objet spécial est de résoudre , à l'aide de constructions effectuées sur un plan , les différens problèmes qui se rapportent aux trois dimensions de l'étendue. Le procédé dont on fait usage , est la *méthode des projections* , qui consiste à rapporter à deux plans qui se coupent , toutes les parties de l'espace.

Les difficultés qui se présentent , lorsqu'on étudie les traités de Géométrie descriptive , me paraissent tenir à plusieurs causes que je vais indiquer :

Des élèves , qui ont appris la Géométrie avec facilité , ont de la peine à retrouver les théorèmes sur lesquels il faut s'appuyer pour démontrer l'exactitude des diverses constructions indiquées , et souvent même ces constructions dépendent de principes qui ne se trouvent pas dans les traités de Géométrie. De plus , on est accoutumé , dans ces traités , à voir sur les figures , les points et les lignes qui servent aux démonstrations , ce qui n'a plus lieu , dans la Géométrie descriptive , à l'égard des points et des lignes qui ne sont pas dans les plans de projection.

Pour remédier à ces inconvéniens , et pour ne pas interrompre l'enchaînement des raisonnemens qui conduisent à la solution des problèmes de la Géométrie descriptive , j'établis dans des *préliminaires* , les diverses propriétés qui servent de fondement à la construction des épurés.

Afin de faciliter l'intelligence des démonstrations , je fais connaître , par des numéros de renvoi , les propositions précédentes auxquelles il faut avoir re-

cours ; et lorsque cela me paraît nécessaire , j'indique , sur une figure , les lignes , qui étant situées dans l'espace , ne servent qu'à faire connaître comment on peut déduire les *inconnues* des *données* , à l'aide de constructions exécutées sur un seul plan. J'en déduis le moyen de tracer l'*épure* qui ne renferme que les lignes nécessaires à la solution du problème.

Je discute avec soin les différens cas qui peuvent se présenter , et lorsque des constructions se trouvent en défaut , dans certains cas particuliers , je résous directement la question proposée.

J'ai principalement insisté sur la *construction de la pyramide triangulaire* , parce que cette construction fournit la solution graphique des différens problèmes relatifs aux *triangles sphériques*.

J'ai donné le moyen de trouver les *rabattemens* , sur les plans de projection , d'un point de l'espace situé dans un plan connu , et réciproquement , de déterminer les projections d'un point de l'espace dont on connaît le *rabattement* sur l'un des plans de projection. J'en ai déduit une méthode générale pour résoudre des problèmes relatifs à des points et à des lignes situés dans l'espace , lorsque les *données* et les *inconnues* étant sur un même plan , ces *données* ne sont déterminées que par leurs projections.

J'ai adopté plusieurs expressions abrégées qui sont consacrées par l'usage. Lorsque je parlerai d'une *ligne* , sans en désigner l'espèce , il s'agira d'une *ligne droite*. Lorsque je dirai *tirez AB* , il faudra entendre , *tirez la droite AB* par les points A et B. La *perpendiculaire sur le milieu d'une ligne AB* , sera la per-



pendiculaire à la droite AB, menée par le milieu de AB. Lorsqu'on parlera d'un cercle OA, il s'agira du cercle dont le centre est O et dont le rayon est OA. Quand on parlera d'un *arc*, sans désigner son espèce, il s'agira toujours d'un *arc de cercle*; et suivant qu'un arc sera situé dans un plan horizontal ou dans un plan vertical, on dira que cet arc est *horizontal* ou qu'il est *vertical*. De même, un *angle* sera dit *horizontal* ou *vertical*, selon que ses deux côtés seront dans un plan horizontal ou vertical; et quand les côtés de l'angle seront dans un plan qui formera un angle aigu ou obtus avec l'horizon, on dira que cet angle est *oblique*. Lorsqu'on proposera de *mesurer* un triangle, un rectangle, un cercle, etc., il faudra entendre qu'on veut en mesurer la surface.

Les numéros placés entre parenthèses, indiquent des renvois aux articles correspondans de cet ouvrage. Ainsi, dans la 7<sup>e</sup> ligne de la page 10, l'expression (n° 15) indique un renvoi au théorème de l'article 15 de la page 8.

Cet ouvrage ayant été composé avec la seule intention d'être utile aux Élèves, en facilitant leurs études, je profiterai avec reconnaissance de toutes les observations que MM. les Professeurs voudront bien m'adresser.

---

# TABLE DES MATIÈRES.

## PREMIÈRE PARTIE.

### *Théorèmes et Problèmes relatifs à des points et à des lignes qui sont dans un même plan.*

Numéros.		Pages.
1... 29.	§ Ier. <i>Théorèmes.</i> .....	1... 16

### PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE.

30... 35.	§ II. <i>Constructions de Lignes proportionnelles , de quarrés et de rectangles.</i> .....	16... 19
36... 58	§ III. <i>Constructions de Droites assujetties à des conditions données.</i> .....	19... 35
59... 65.	§ IV. <i>Constructions de circonférences qui satisfac- sent à des conditions données.</i> .....	35... 40
66 .. 74.	§ V. <i>Constructions de Points qui satisfassent à des conditions données.</i> .....	40... 45
75... 105.	§ VI. <i>Constructions de Triangles.</i> .....	45... 60
106... 116.	§ VII. <i>Problèmes sur les Lieux géométriques.</i> ...	60... 66

## DEUXIÈME PARTIE.

### *Propriétés générales des Points , des Lignes et des Surfaces , situés d'une manière quelconque dans l'espace.*

117... 141.	§ Ier. <i>Des Plans. De la Perpendiculaire , des Obli- ques et des Parallèles à un plan. Problèmes et Théorèmes.</i> .....	67... 74
142... 166.	§ II. <i>Des Droites et des Plans parallèles. De la plus courte distance.</i> .....	74 .. 81
167... 189.	§ III. <i>Angles formés par des Droites et des Plans.</i>	81... 92
190 et 191.	§ IV. <i>Des Lignes proportionnelles.</i> .....	92... 94
192... 197.	§ V. <i>Propriétés des Angles solides.</i> .....	94... 98

## TABLE DES MATIÈRES.

Numéros.		Pages.
198...208.	§ VI. Propriétés relatives aux centres des parallélogrammes et des parallélépipèdes. Propriétés de la <i>Sphère</i> .....	99...107
209.	§ VII. Plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la <i>Sphère</i> .....	108...110
210.	§ VIII. Des <i>Surfaces de révolution</i> .....	110
211 et 212.	§ IX. Propriétés relatives aux <i>Surfaces gauches</i> .	110...114
213...215.	§ X. Propriétés relatives à des <i>Pyramides</i> et à des <i>Cônes</i> .....	115...118

## TROISIÈME PARTIE.

*Éléments de Géométrie descriptive.*

216...237.	§ 1 <sup>er</sup> . But de la <i>Géométrie descriptive</i> . Propriétés relatives aux <i>Projections</i> des points et des lignes, et aux <i>traces</i> des plans.....	119...128
§ II. <i>Épures relatives aux Problèmes sur la ligne droite et le plan.</i>		
238.	Des conventions et des notations adoptées.	128
239.	1 <sup>er</sup> PROBLÈME. Les projections de deux points étant données, construire les projections de la droite qui passe par ces deux points. ....	128 et 129
240.	2 <sup>e</sup> PROBLÈME. Connaissant les projections des extrémités d'une droite, construire la grandeur de cette droite.....	129 et 130
241.	3 <sup>e</sup> PROBLÈME. Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.....	130
242.	4 <sup>e</sup> PROBLÈME. Connaissant les traces de deux plans, construire l'intersection de ces plans.....	130...132
243.	5 <sup>e</sup> PROBLÈME. Déterminer le point d'intersection de trois plans donnés.....	132 et 133
244.	6 <sup>e</sup> PROBLÈME. Construire les points où une droite rencontre les plans de projection.	133 et 134
245.	7 <sup>e</sup> PROBLÈME. Faire passer un plan par trois points donnés. ....	134...136
246.	8 <sup>e</sup> PROBLÈME. Conduire un plan par deux droites qui se coupent, ou qui sont parallèles.....	136

# TABLE DES MATIÈRES.

xj

Numéros.

Pages.

247.	9 <sup>e</sup> PROBLÈME. Trouver le point où une droite donnée rencontre un plan connu...	136...138
248.	10 <sup>e</sup> PROBLÈME. Connaissant les traces d'un plan, et l'une des projections d'un point situé dans ce plan, trouver l'autre projection de ce point. ....	138
249.	11 <sup>e</sup> PROBLÈME. Par un point donné, conduire un plan parallèle à un plan donné.	138...140
250.	12 <sup>e</sup> PROBLÈME. Un point et un plan étant donnés, on propose de mener une perpendiculaire du point donné sur le plan donné, de trouver le pied de la perpendiculaire, et de construire la longueur de cette perpendiculaire.....	140
251.	13 <sup>e</sup> PROBLÈME. Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite donnée.....	140 et 141
252.	14 <sup>e</sup> PROBLÈME. Un point et une droite étant donnés, on propose de mener par le point donné une perpendiculaire à la ligne donnée, de déterminer le pied de cette perpendiculaire, et de trouver la distance du point donné à la droite donnée.....	141
253.	15 <sup>e</sup> PROBLÈME. Par une droite donnée, conduire un plan perpendiculaire à un plan donné. ....	141 et 142

## § III. Angles formés par des droites et des plans.

254.	16 <sup>e</sup> PROBLÈME. Construire l'angle formé par deux droites dont les projections sont données. ....	142...144
255.	17 <sup>e</sup> PROBLÈME. Construire l'angle formé, dans l'espace, par les traces d'un plan donné. ....	144
256.	18 <sup>e</sup> PROBLÈME. Par le point d'intersection de deux droites données, mener dans leur plan une droite qui divise l'angle qu'elles forment en deux parties égales.....	144 et 145
257.	19 <sup>e</sup> PROBLÈME. Réduire un angle à l'horizon.	145 et 146
258.	20 <sup>e</sup> PROBLÈME. Construire l'angle formé par une droite avec un plan.....	146 et 147
259.	21 <sup>e</sup> PROBLÈME. Déterminer les angles formés	



	par un plan donné, avec les plans de projection.....	147
260.	22 <sup>e</sup> PROBLÈME. Déterminer l'angle formé par deux plans donnés.....	147...149
261.	23 <sup>e</sup> PROBLÈME. Construire un plan qui passe par l'intersection de deux plans donnés, et qui divise l'angle qu'ils forment en deux parties égales.....	149
§ IV. <i>Plus courte distance de deux droites.</i>		
262.	24 <sup>e</sup> PROBLÈME. Construire la plus courte distance entre deux droites qui ne sont pas dans un même plan.....	150 et 151
§ V. <i>De la sphère inscrite et circonscrite.</i>		
263.	25 <sup>e</sup> PROBLÈME. Inscire une sphère dans une pyramide triangulaire.....	151...153
264.	26 <sup>e</sup> PROBLÈME. Circonscire une sphère à une pyramide triangulaire.....	153...155
§ VI. <i>Construction de la pyramide triangulaire.</i>		
265.	Les six élémens que l'on considère dans une pyramide triangulaire sont ses trois faces et les trois angles dièdres formés par ces faces.....	155
266.	Lorsqu'on connaît trois des six élémens d'une pyramide triangulaire, la recherche des trois autres élémens conduit à six questions différentes; car les trois élémens donnés peuvent être: les trois faces, ou deux faces et l'angle compris, ou deux faces et l'angle opposé à l'une d'elles, ou les trois angles dièdres, ou deux angles et la face adjacente, ou deux angles et la face opposée à l'un de ces angles. Les propriétés de la pyramide supplémentaire (n <sup>o</sup> 197) fournissent le moyen de ramener les trois derniers cas aux trois premiers.....	155 et 156
267...270.	27 <sup>e</sup> PROBLÈME. Connaissant les trois angles plans qui forment un angle solide triple,	

# TABLE DES MATIÈRES.

xiiij

Noméros.		Pages.
	construire les trois angles dièdres , formés par ces angles plans.....	156...162
271.	28 <sup>e</sup> PROBLÈME. Connaissant deux angles plans et l'angle dièdre formé par les plans de ces deux angles, construire le troisième angle plan et les deux autres angles diè- dres.....	162...164
272 et 273.	29 <sup>e</sup> PROBLÈME. Connaissant deux angles plans et l'angle dièdre opposé à l'un de ces deux angles plans, construire le troisième angle plan et les deux autres angles dièdres.	164...167
274.	Construction d'un <i>triangle sphérique</i> , lors- qu'on connaît trois de ses six élémens.....	167
§ VII. Problèmes sur des points et sur des lignes dont les projections sont données.		
275.	Considérations générales.....	168
276.	30 <sup>e</sup> PROBLÈME. Construire les rabattemens, sur les plans de projection, d'un point de l'espace situé dans un plan donné.	168...177
277.	31 <sup>e</sup> PROBLÈME. Connaissant le rabatte- ment , sur l'un des plans de projection, d'un point de l'espace situé dans un plan donné , construire les projections de ce point de l'espace.....	178...184
278.	Résolution des deux problèmes précédens ( nos 276 et 277 ), lorsque le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans de projec- tion.....	184...186
279.	Connaissant l'une des deux projections d'une courbe située dans un plan donné, cons- truire son autre projection , et déterminer cette courbe dans sa vraie grandeur.....	187
280.	Connaissant le rabattement sur l'un des plans de projection d'une courbe située dans un plan donné, construire les pro- jections de cette courbe.....	187
281.	Lorsqu'on sait résoudre un problème sur des points et des lignes qui sont dans un même plan , les constructions des nos 276...278, fournissent le moyen de résoudre le même problème , quand les <i>données</i> étant situées	

Numéros.		Pages.
	dans l'espace (et sur un même plan), ne sont déterminées que par leurs pro- jections.....	187
282.	32 <sup>e</sup> PROBLÈME. Connaissant les projections des deux côtés d'un angle situé dans l'es- pace, on propose d'inscrire dans cet angle une droite d'une longueur donnée, qui forme un angle connu avec l'un des côtés donnés. ....	188... 190
283.	33 <sup>e</sup> PROBLÈME. Deux droites qui se coupent étant données de grandeur et de position, dans l'espace, trouver un point de leur plan, tel que les droites menées de ce point aux extrémités des droites données, forment entre elles des angles donnés....	190 et 191
284.	34 <sup>e</sup> PROBLÈME. Par un point donné dans le plan de deux parallèles dont les projec- tions sont connues, mener une droite telle que la partie de cette droite comprise entre ces parallèles soit d'une longueur donnée.	191... 194
285.	35 <sup>e</sup> PROBLÈME. Trois points étant donnés dans l'espace, déterminer la vraie gran- deur de la circonférence qui passe par ces trois points, et construire les projections des différens points de cette courbe....	194 et 195
286.	36 <sup>e</sup> PROBLÈME. Trois points étant donnés dans l'espace, on propose de construire le cercle inscrit dans le triangle formé par les droites qui joignent ces points, et de trouver les projections de la circonférence de ce cercle. ....	195 et 196
287.	37 <sup>e</sup> PROBLÈME. Connaissant la projection horizontale d'un point situé sur une surface sphérique dont le centre et le rayon sont donnés, construire la pro- jection verticale de ce point. ....	196... 199
288.	38 <sup>e</sup> PROBLÈME. On propose de construire le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface d'une sphère dont le centre et le rayon sont donnés. ....	199 et 200
289.	39 <sup>e</sup> PROBLÈME. Connaissant la projection horizontale d'un point situé sur une surface de révolution dont l'axe et la génératrice sont donnés, construire	

# TABLE DES MATIÈRES.

xv

Numéros.		Pages.
	<i>la projection verticale de ce point.....</i>	200...202
290.	<b>40<sup>e</sup> PROBLÈME.</b> <i>Connaissant les projections de plusieurs points de l'espace, reconnaître si tous ces points de l'espace sont dans un même plan.....</i>	202

## NOTES.

### *Note sur le n<sup>o</sup> 242.*

291.	<i>Construire l'intersection de deux plans, lorsque les traces de ces plans passent par un même point de la ligne de terre, et lorsque les traces horizontales ou verticales se coupent en un point qui sort des limites de la feuille sur laquelle on veut tracer l'épure. ....</i>	202...206
------	--	-----------

### *Note sur le n<sup>o</sup> 246.*

292.	<i>Trouver les traces du plan déterminé par deux droites qui se coupent, lorsque les projections de ces droites passent par un même point de la ligne de terre.....</i>	206 et 207
------	---	------------

### *Note sur le n<sup>o</sup> 272.*

293.	<b>PROBLÈME.</b> <i>Connaissant deux angles plans d'un angle solide triple, et l'angle dièdre opposé à l'un de ces angles plans, construire le troisième angle plan et les deux autres angles dièdres, en faisant usage de la méthode des rabattemens..</i>	207 et 208
------	---	------------

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.



*Errata.*

Pages. Lignes.

- 32, 6, MN *telle, que*, lisez MN, *telle que*  
 32, 4 en remontant, QR *telle, que*, lisez QR, *telle que*  
 41, 8 du n° 67, Ct', lisez Ct  
 74, 8 en remontant, son, lisez sont  
 94, 5, *L'espace compris*, lisez *L'espace indéfini compris*  
 107, 2 en remontant, circonférences *menée*, lisez circonférence, *menée*  
 118, 8 en remontant,  $z = \pi \times \overline{AD}^2$  etc., lisez  $z = \pi \times \overline{AD}$  etc.  
 127, 11, *pd'*, lisez *pd'*  
 135, 7 en remontant, 4°. Si deux droites, lisez 4°. Si les deux droites  
 161, 6 en remontant, PG' lisez PG';  
 172, 3 en remontant, deux lisez un ou deux  
 174, 4, deux lisez un ou deux  
 182, 6 en remontant, laire *l'*, lisez laire *ll'*  
 182, 2 en remontant, a trace, lisez la trace  
 191, 8 en remontant, (*ab, a'b'*), (*ac, a'c'*), lisez (*mb, m'b'*), (*mc, m'c'*),  
 199, 13, au lieu de *a'* lisez *a'*  
 202, 5 en remontant, au lieu de *es* lisez *les*  
 202, 4 en remontant, l donc lisez donc  
 202, 3 en remontant, TaT lisez TaT'  
 205, 3, au lieu de coupe lisez rencontre  
 205, 4, plans donnés *snivant*, lisez plans donnés, et coupe ces plans  
 suivant

# THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE,

SUIVIS

## DES ÉLÉMENTS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

---

### PREMIÈRE PARTIE.

*Théorèmes et Problèmes relatifs à des points et à des lignes situés dans un même plan.*

#### § 1<sup>er</sup>. THÉORÈMES.

1. THÉORÈME (*fig. 1*). LORSQUE dans un triangle ABC on mène une droite CE, du sommet C de l'un des angles, au milieu E du côté opposé, on a

$$(1) \dots \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = 2(\overline{CE}^2 + \overline{AE}^2).$$

En effet, tirez CD perpendiculaire à AB, vous aurez

$$BD = BE - ED, \quad AD = AE + ED.$$

Élevant ces équations au quarré, ajoutant respectivement  $\overline{CD}^2$  aux deux membres des équations qui en résulteront, et observant que la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit est égale au quarré de l'hypoténuse, on trouvera

$$\overline{CB}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 - 2BE \times ED, \quad \overline{CA}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{AE}^2 + 2AE \times ED;$$

*Géométrie.*

Ajoutant ces équations membre à membre, et remarquant que  $AE = BE$ , on obtiendra l'équation (1).

**REMARQUE.** Si du point E comme centre, avec EC pour rayon, on décrit une circonférence, tous les triangles qui auront AB pour base, et dont les sommets seront sur la circonférence, seront tels, que la somme des quarrés des côtés adjacens à la base sera une quantité constante  $2(\overline{CE}^2 + \overline{AE}^2)$ .

**2. THÉORÈME (fig. 2).** *Les trois droites qui divisent les angles d'un triangle ABC en deux parties égales, se rencontrent au même point.*

Divisez les angles BAC, ABC, en deux parties égales, par les droites AM, BM, et tirez CM; je dis que CM divise l'angle ACB en deux parties égales. En effet, si du point M on mène des perpendiculaires MF, ME, MD, sur les côtés AB, AC, BC, les triangles rectangles AMF, AME, seront égaux, ainsi que les triangles BMF, BMD. Donc,  $MF = ME = MD$ . Les triangles rectangles MCD, MCE, seront donc égaux; la droite CM divise donc l'angle ACB en deux parties égales.

**REMARQUE.** Les perpendiculaires MF, MD, ME, étant égales, si du point M comme centre, avec le rayon MF, on décrirait une circonférence, elle serait tangente aux trois côtés du triangle ABC. Cela donne le moyen d'inscrire un cercle dans un triangle.

**3. THÉORÈME (fig. 3).** *Les trois perpendiculaires menées des sommets des angles d'un triangle ABC sur les côtés opposés, se rencontrent au même point.*

Des sommets B, C, menez des perpendiculaires BE, CF, sur AC et AB; elles se couperont en M; il faut démontrer que la droite AMD est perpendiculaire à BC. Sur BC, comme diamètre, décrivez une demi-circonférence; elle passera par les points E, F, car les angles BEC, BFC, sont droits. Par la même raison, la circonférence décrite sur AM comme diamètre, passera par les points E, F. Tirez la corde FE. Les angles CFE, CBE, seront égaux, ainsi que les angles MFE, MAE. Mais, l'angle CFE est le même que MFE; les angles CBE, MAE, sont donc égaux; les triangles BMD, AME, sont donc équiangles. Or,

l'angle AEM est droit, l'angle BDM est donc droit; AD est donc perpendiculaire à BC.

4. THÉORÈME (fig. 4). *Les trois perpendiculaires menées sur les milieux des côtés d'un triangle ABC, se rencontrent au même point.*

Par les milieux E, F, des côtés AC, AB, menez des perpendiculaires EM, FM, à ces côtés, et tirez MD perpendiculaire à BC. Vous aurez

$$MB = MA, MA = MC; \text{ d'où } MB = MC.$$

Les triangles rectangles MDB, MDC, seront donc égaux; le point D est donc le milieu de BC. Ce qui démontre la propriété énoncée.

REMARQUE. Le point M est le centre du cercle qui passerait par les sommets A, B, C, du triangle ABC; car  $MA = MB = MC$ . Cela donne le moyen de *circonscrire un cercle à un triangle*.

5. THÉORÈME (fig. 5). *Les trois droites menées des sommets des angles d'un triangle sur les milieux des côtés opposés, se coupent au même point.*

Soit ABC le triangle proposé. Prenez les milieux D, E, des côtés CB, CA, et menez les droites AD, BE, DE, CMF; il s'agit de prouver que le point F est le milieu de AB.

La ligne DE, divisant les côtés CB, CA, en parties proportionnelles, est parallèle à BA; les triangles CDE, MAB, MAF, CDQ, sont donc respectivement semblables aux triangles CBA, MDE, MDQ, CBF. Par conséquent, on a

$$CD : CB :: DE : BA :: DM : MA :: DQ : AF.$$

Mais,  $CD : CB :: DQ : BF$ ; donc  $AF = BF$ .

REMARQUE. La proportion  $CD : CB :: DM : MA$ , démontre que DM est le tiers de AD; car CB étant le double de CD, il en résulte que MA est le double de DM.

6. THÉORÈME (fig. 6). *Si d'un point O pris dans l'intérieur du triangle ABC, on mène les perpendiculaires OA', OB', OC',*

...

sur les côtés  $EC$ ,  $AC$ ,  $AB$ . on aura

$$(1) \dots \overline{AC'}^2 + \overline{BA'}^2 + \overline{CB'}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{A'C}^2 + \overline{B'A}^2.$$

Car, en tirant les droites  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , on a

$$\begin{aligned} \overline{OC'}^2 &= \overline{OB}^2 - \overline{C'B}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AC'}^2, \text{ d'où } (2) \dots \overline{AC'}^2 - \overline{C'B}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2, \\ \overline{OA'}^2 &= \overline{OB}^2 - \overline{BA'}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{A'C}^2, \text{ d'où } (3) \dots \overline{BA'}^2 - \overline{A'C}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2, \\ \overline{OB'}^2 &= \overline{OC}^2 - \overline{CB'}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{B'A}^2, \text{ d'où } (4) \dots \overline{CB'}^2 - \overline{B'A}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OA}^2. \end{aligned}$$

Ajoutant les équations (2), (3), (4), on trouve l'équation (1).

7. **THÉORÈME** (fig. 7). Un point  $O$  étant pris dans l'intérieur du triangle  $ABC$ , si l'on mène les droites  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$ , et qu'on les prolonge jusqu'à ce qu'elles rencontrent les côtés du triangle en  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , on aura

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A.$$

En effet, les surfaces des triangles de même hauteur étant proportionnelles à leurs bases, on a

$$CAC' : CBC' :: AC' : C'B, \text{ et } OC'A : OC'B :: AC' : C'B;$$

done  $CAC' : OC'A :: CBC' : OC'B.$

On en déduit

$$\begin{aligned} CAC' - OC'A : CBC' - OC'B :: CAC' : CBC' :: AC' : C'B, \text{ ou} \\ COA : COB :: AC' : C'B. \end{aligned}$$

On prouverait de même que

$$\begin{aligned} AOB : AOC :: BA' : A'C, \\ BOC : BOA :: CB' : B'A. \end{aligned}$$

Multipliant les trois dernières proportions, terme à terme, on obtient une nouvelle proportion dans laquelle les deux termes du premier rapport étant égaux, les deux termes du second rapport sont aussi égaux; ce qui conduit au principe énoncé.

8. **THÉORÈME** (fig. 7). Un point  $O$  étant pris dans l'intérieur

d'un triangle  $ABC$ , si l'on mène les droites  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$ , et qu'on les prolonge jusqu'à ce qu'elles rencontrent les côtés du triangle en  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , on aura

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

En effet, l'égalité  $\angle BOC + \angle AOC + \angle AOB = \angle BAC$  donne

$$\frac{\angle BOC}{\angle BAC} + \frac{\angle AOC}{\angle BAC} + \frac{\angle AOB}{\angle BAC} = 1.$$

Or, les triangles  $BOC$ ,  $BAC$ , ayant même base  $BC$ , sont entre eux comme leurs hauteurs  $OH'$ ,  $AH$ ; et l'on a

$$\frac{OH'}{AH} = \frac{OA'}{AA'}; \text{ donc } \frac{\angle BOC}{\angle BAC} = \frac{OA'}{AA'}.$$

On verrait de même que

$$\frac{\angle AOC}{\angle BAC} = \frac{OB'}{BB'}, \text{ et } \frac{\angle AOB}{\angle BAC} = \frac{OC'}{CC'}.$$

Le théorème est donc démontré.

**9. THÉORÈME (fig. 8).** *De tous les triangles formés avec un angle donné, compris entre deux côtés variables dont la somme est donnée, le plus grand en surface est celui dans lequel ces deux côtés sont égaux.*

**1<sup>re</sup> DÉMONSTRATION.** Soit un triangle  $BAC$ , dans lequel  $BA = BC$ . Prolongez  $BC$ , d'une quantité quelconque  $CN$ ; prenez  $AM = CN$ , et tirez  $MN$ ; dans le triangle  $BMN$ , la somme des côtés qui comprennent l'angle  $B$  sera égale à la somme des côtés qui comprennent le même angle dans le triangle  $BAC$ . Il s'agit de prouver que la surface du triangle isocèle  $BAC$  est plus grande que celle du triangle  $BMN$ . Menez  $MF$  parallèle à  $BC$ ; les droites  $BA$ ,  $BC$ , étant égales,  $MA$  sera égal à  $MF$ . Mais  $MA = CN$ ; les droites  $MF$ ,  $CN$ , sont donc égales et parallèles; les triangles  $DMF$ ,  $DNC$ , sont donc égaux. Le triangle  $DMA$  est donc plus grand que  $DNC$ ; et par conséquent, la surface du triangle  $BAC$  est plus grande que celle du triangle  $BMN$ .

2<sup>e</sup> DÉMONSTRATION. Les triangles ABC, MBN, ayant un angle commun B, on sait que

$$(1) \dots \text{surface } ABC : \text{surface } MBN :: BA \times BC : BM \times BN.$$

Mais,

$$BC = BA, CN = AM, BM = BA - AM = BC - CN, BN = BC + CN; \text{ donc}$$

$$BA \times BC = \overline{BC}^2, BM \times BN = (BC - CN) \times (BC + CN) = \overline{BC}^2 - \overline{CN}^2.$$

La proportion (1) devient

$$\text{surface } ABC : \text{surface } MBN :: \overline{BC}^2 : \overline{BC}^2 - \overline{CN}^2.$$

$$\text{Or, } \overline{BC}^2 > \overline{BC}^2 - \overline{CN}^2; \text{ donc surface } ABC > \text{surface } MBN.$$

10. THÉORÈME (fig. 9). Parmi tous les triangles qui, ayant leurs sommets sur l'arc AMB, ont le côté commun AB, le triangle isoscèle est celui dans lequel les deux autres côtés forment la plus grande somme.

Pour le démontrer, prenez le milieu M de l'arc AMB, et un point quelconque E de cet arc; tirez les droites AEx, AMy, BM, BE; prenez ED = EB et MC = MB, vous aurez MA = MC, car MA = MB. Tirez les droites BC, BD. L'angle extérieur d'un triangle étant égal à la somme des deux angles intérieurs opposés, il en résulte que

$$\text{l'angle } AMB = MBC + MCB = 2MCB = 2ACB,$$

$$\text{l'angle } AEB = EDB + EBD = 2EDB = 2ADB.$$

$$\text{Or, l'angle } AMB = AEB; \text{ donc l'angle } ACB = ADB.$$

Par conséquent, si du point M, pris pour centre, on décrit une circonférence avec le rayon MA, comme elle passera par les points A, B, C, elle passera aussi par le sommet D de l'angle ADB, puisque cet angle est égal à ACB et s'appuie sur le même arc; AC sera donc un diamètre, et AD une corde. On aura donc

$$AC > AD, \text{ ou } AM + MC > AE + ED, \text{ ou } AM + MB > AE + EB.$$

11. THÉORÈME (fig. 10). Parmi tous les triangles de même

base  $AB$ , et dont les sommets sont sur une même droite  $GH$ , le triangle dont le périmètre est un minimum, est celui dans lequel les deux autres côtés forment des angles égaux avec  $GH$ .

Tirez la perpendiculaire  $BF$  à  $GH$ ; prenez  $DE = DB$ , et menez la droite  $AE$  qui coupe  $GH$  en  $C$ . Par le point  $C$  et un point quelconque  $O$  de  $GH$ , conduisez les droites  $CB$ ,  $OE$ ,  $OA$ ,  $OB$ ; les côtés  $CA$ ,  $CB$ , feront des angles égaux avec  $GH$ , car  $GH$  étant perpendiculaire sur le milieu  $D$  de  $BE$ , les angles  $ECH$ ,  $BCH$ ,  $ACG$ , sont égaux. Il suffit donc de prouver que  $CA + CB$  est moindre que  $OA + OB$ ; et cela est évident, car on a

$$OE = OB, CA + CE < OA + OE, \text{ ou } CA + CB < OA + OB.$$

REMARQUE. Si la droite  $GH$  était parallèle à la base  $AB$ , on aurait  $CA = CB$ . Par conséquent,

*De tous les triangles de même base et de même hauteur, le triangle dont le périmètre est le plus petit possible, est celui dans lequel les deux autres côtés sont égaux.*

12. THÉORÈME (fig. 10). *De tous les triangles de même base et de même périmètre, le triangle qui a la plus grande surface est celui dans lequel les deux côtés variables sont égaux.*

En effet, soient

$$OA = OB, CA > CB, \text{ et } CA + CB = OA + OB = 2OA.$$

Il s'agit de faire voir que la surface du triangle isocèle  $OAB$  est plus grande que celle du triangle scalène  $CAB$  de même périmètre. Menant  $OP$  perpendiculaire sur  $AB$ , et  $Cn$  parallèle à  $BA$ , il faut prouver que  $PO$  est plus grand que  $Pn$ . Cela est évident, car  $Cn$  étant parallèle à  $BA$ , il résulte de la remarque du n° 11, que

$$CA + CB > nA + nB, \text{ ou } 2OA > 2nA; \text{ donc } PO > Pn.$$

13. THÉORÈME (fig. 10). *Parmi tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral est celui dont la surface est la plus grande.*

Soit  $OAB$  le triangle maximum. Si deux côtés  $OA$ ,  $OB$  étaient inégaux, il existerait un triangle de même base  $AB$ , dont



les deux autres côtés seraient égaux entre eux et formeraient la même somme que  $OA + OB$ ; la surface de ce dernier triangle serait plus grande que  $OAB$  (n° 12); ce qui est contre l'hypothèse. Deux côtés quelconques  $OA, OB$ , sont donc égaux.

Le triangle *maximum* est donc équilatéral.

14. THÉORÈME (fig. 11). Lorsque deux circonférences  $ABDF, ABGE$ , se coupent en  $A$  et  $B$ , il en résulte les propriétés suivantes : 1°. la droite  $CC'$ , menée par les centres  $C, C'$ , est perpendiculaire sur le milieu  $m$  de  $AB$ ; 2°. la droite  $DE$ , qui joint les extrémités  $D, E$ , des diamètres  $AD, AE$ , est perpendiculaire sur  $AB$ ; 3°.  $DE$  passe par le point  $B$ ; 4°.  $DE$  est la plus grande des droites menées par le point  $B$ , et terminées aux circonférences données.

1°. On a  $CA = CB, C'A = C'B$ ; la droite  $CC'$  est donc perpendiculaire sur le milieu  $m$  de  $AB$ .

2°. La proportion évidente  $AC : CD :: AC' : C'E$ , exprime que  $CC'$  est parallèle à  $DE$ ; mais  $CC'$  est perpendiculaire sur  $AB$ ;  $DE$  est donc perpendiculaire à  $AB$ .

3°. Cherchons par quel point de  $AB$  passe  $DE$ . Soit  $K$  ce point; la droite  $DKE$ , parallèle à  $CC'$ , donne  $AC : CD :: Am : mK$ . Mais,  $AC = CD$ ; donc  $Am = mK$ . Or,  $Am = mB$ ; donc  $mK = mB$ . Le point cherché  $K$  tombe donc en  $B$ .

4°. Si par le point  $B$  on mène une droite quelconque  $FG$ , cette droite sera toujours plus petite que  $DE$ ; car, en joignant  $AF$  et  $AG$ , les angles  $AFB, ADB$ , seront égaux, comme ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc  $AB$ . Par une raison semblable, l'angle  $AGB = AEB$ . Les triangles  $AFG, ADE$ , sont donc semblables; ce qui donne,  $AF : AD :: FG : DE$ .

Mais, la corde  $AF$  est plus courte que le diamètre  $AD$ ;  $FG$  est donc plus petit que  $DE$ .

15. THÉORÈME (fig. 12). Selon que deux cercles se touchent extérieurement ou intérieurement, la distance  $OO'$  des centres  $O, O'$ , est égale à la somme ou à la différence des rayons.

Cela se réduit à faire voir que le point de tangence est sur la droite qui joint les centres; or, s'il se trouvait hors de cette

droite, en B par exemple, en abaissant la perpendiculaire BC sur  $OO'$ , et prolongeant BC d'une quantité  $CB' = BC$ , le point B' appartiendrait aussi aux deux circonférences. Par conséquent, les deux cercles se couperaient; ce qui est contre l'hypothèse.

16. THÉORÈME (fig. 13). *Lorsque deux cercles se coupent, la distance  $OO'$  des centres est plus petite que la somme des rayons  $OA, O'A$ , et plus grande que leur différence.*

En effet, soit A un des points d'intersection; en menant les rayons  $OA, O'A$ , le triangle  $OA O'$  donnera

$$OO' < OA + O'A, \quad OA < OO' + O'A, \quad OO' > OA - O'A.$$

17. THÉORÈME (fig. 14 et 15). *Lorsque deux cercles ne se rencontrent pas, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, ou plus petite que leur différence.*

Cela est évident à l'inspection des figures; la première relation a lieu lorsque les deux cercles sont extérieurs (fig. 14), et la seconde lorsqu'ils sont l'un dans l'autre (fig. 15).

18. THÉORÈME (fig. 16). *Lorsque deux circonférences CS, OA se coupant en deux points A, B, la seconde passe par le centre C de la première, si par le point A on mène une sécante AM commune aux deux cercles, et si l'on tire la corde DB, les droites DB, DM, seront égales entre elles.*

Conduisez le diamètre ACS et les cordes BM, BS, CB. L'angle extérieur d'un triangle étant égal à la somme des deux angles intérieurs opposés, et les angles qui ont leur sommet sur la circonférence étant égaux lorsqu'ils s'appuient sur le même arc, vous aurez

$$CS = CB, \quad CBS = CSB, \quad ASB = AMB, \quad ACB = ADB,$$

$$ACB = CBS + CSB = 2CSB = 2ASB = 2AMB,$$

$$ADB = DMB + DBM = AMB + DBM.$$

$$\text{Mais, } ACB = ADB; \text{ donc } 2AMB = AMB + DBM.$$

$$\text{Vous en déduirez, } AMB = DBM, \text{ ou } DMB = DBM.$$

Les angles DMB, DBM, étant égaux, les côtés DB, DM sont égaux. Ce qui démontre le principe énoncé.

19. THÉORÈME (*fig. 17*). *Si deux cercles se touchent extérieurement ou intérieurement en un point M, et que par ce point on mène deux sécantes quelconques AB, CD, on aura*

$$(1) \dots MA : MB :: MC : MD, \text{ ou } (2) \dots MA : MB' :: MC : MD'.$$

Pour le démontrer : menez la droite EF par les centres O, O', O'', des cercles donnés ; cette droite passera par le point M de contact (n° 15). Tirez AE, CE, DF, BF, D'F', B'F' ; les triangles rectangles MAE, MBF, MB'F', seront semblables, ainsi que les triangles MCE, MDF, MD'F' ; ce qui donnera

$$MA : MB : MB' :: ME : MF : MF' :: MC : MD : MD'.$$

Cette suite de rapports égaux conduit aux proportions (1) et (2).

REMARQUE. Les proportions (1) et (2) donnent

$$MA + MB : MA :: MC + MD : MC, \text{ ou } (3) \dots AB : AM :: CD : CM ;$$

$$B'M : MA - B'M :: D'M : MC - MD', \text{ ou } (4) \dots B'M : B'A :: D'M : D'C.$$

20. THÉORÈME (*fig. 17*). *Lorsque deux cercles OM, O'M, se touchent extérieurement en M, si par deux points A, C, pris sur une des circonférences, on mène des tangentes AT, CT', à l'autre circonférence, et si l'on tire les cordes AM, CM, on aura*

$$(5) \dots AT : CT' :: AM : CM.$$

En effet, la proportion (3) du n° 19 donne

$$AB \times CM = AM \times CD.$$

$$\text{D'ailleurs, } \overline{AT}^2 = AM \times AB, \quad CD \times CM = \overline{CT'}^2.$$

Égalant le produit des trois premiers membres de ces équations, au produit des seconds membres, on trouvera

$$\overline{CM}^2 \times \overline{AT}^2 = \overline{AM}^2 \times \overline{CT'}^2; \text{ d'où } CM \times AT = AM \times CT'.$$

Ce qui démontre l'exactitude de la proportion (5).

21. THÉORÈME (*fig. 18*). *Le quarré du côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle, est égal au quarré du rayon, plus le quarré du côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle.*

Soient, AB le côté du pentagone, et AD celui du décagone; en prenant l'angle droit pour l'unité d'angle, on aura

$$\text{angle } AOB = \frac{4}{5}, \text{ } OAB = OBA = \frac{3}{5}, \text{ } AOD = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} AOB.$$

Si l'on divise l'angle AOD en deux parties égales par la droite OC, et qu'on mène les droites CD, BD, les triangles isoscèles ACD, ADB, ayant l'angle commun A, seront semblables et donneront

$$AC : AD :: AD : AB; \text{ d'où (1)... } \overline{AD}^2 = AB \times AC.$$

Le triangle OBC est isoscèle, car

$$\text{angle } BOC = AOB - AOC = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = \text{angle } OBA.$$

Les triangles isoscèles AOB, BOC, ayant l'angle commun B, sont semblables et donnent la proportion

$$BC : BO :: BO : AB, \text{ d'où (2)... } \overline{BO}^2 = AB \times BC.$$

Ajoutant les équations (1) et (2) membre à membre, il vient  $\overline{AD}^2 + \overline{BO}^2 = AB(AC + BC) = \overline{AB}^2$ . Ce qu'il fallait démontrer.

**22. THÉORÈME (fig. 19).** *Lorsque d'un point quelconque, situé dans l'angle formé par deux côtés contigus d'un parallélogramme, on tire des perpendiculaires sur la diagonale et sur les côtés contigus, le produit de la diagonale par la perpendiculaire menée sur sa direction, est égal à la différence des produits des deux côtés du parallélogramme, par les perpendiculaires menées sur ces côtés. Si le point était hors de l'angle formé par les deux côtés du parallélogramme, le premier produit serait égal à la somme des deux autres.*

Par les points M, m, menez des perpendiculaires MH, ME, MG, mh, me, mg, sur la diagonale et sur les côtés du parallélogramme ABDC, et tirez les droites MA, MB, MD, mA, mB, mD; vous aurez

$$\text{triangle } MAD = ABD + MBD - MAB,$$

$$\text{triangle } mAD = ABD + mBD + mAB.$$

Évaluant les surfaces de ces triangles, et doublant les deux

membres de chaque égalité, il viendra

$$\begin{aligned} AD \times MH &= BD \times GT + BD \times MT - AB \times ME \\ &= BD \times MG - AB \times ME, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD \times mh &= BD \times gt + BD \times mt + AB \times me \\ &= BD \times mg + AB \times me. \end{aligned}$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

23. THÉORÈME (fig. 20). *La somme des quarrés des quatre côtés d'un parallélogramme ABCD, est égale à la somme des quarrés des deux diagonales.*

En effet, les diagonales AC, BD, se coupant mutuellement en deux parties égales, les triangles ADC, ABC, donnent (n° 1)

$$\overline{DA}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{DO}^2 + 2\overline{AO}^2, \quad \overline{BA}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{BO}^2 + 2\overline{AO}^2.$$

Ajoutant ces équations membre à membre, et observant que

$$2\overline{DO}^2 + 2\overline{BO}^2 = 4\overline{BO}^2 = (2\overline{BO})^2 = \overline{BD}^2, \quad 4\overline{AO}^2 = \overline{AC}^2,$$

on aura 
$$\overline{DA}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{BA}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2.$$

24. THÉORÈME (fig. 21). *Si l'on divise proportionnellement les côtés opposés d'un quadrilatère ABCD, de sorte qu'on ait*

$$(1) \dots DG : GC :: AH : HB, \quad AE : ED :: BF : FC,$$

*les droites GH, EF, se couperont en un point O, et l'on aura*

$$(2) \dots EO : OF :: AH : HB, \quad HO : OG :: BF : FC.$$

Par les points E, D, C, F, menez à GH les parallèles Ea, Db, Cc, Fd. Les droites Db, Cc, étant parallèles, vous aurez

$$bH : Hc :: DG : GC :: AH : HB,$$

d'où 
$$AH - bH : HB - Hc :: AH : HB,$$

c'est-à-dire (3) 
$$Ab : Bc :: AH : HB.$$

Les triangles semblables AEa, ADb, et BFd, BCc, donnent

$$Aa : ab :: AE : ED, \quad \text{et} \quad Bd : dc :: BF : FC;$$

et puisqu'en vertu de (1), les seconds rapports de ces deux proportions sont égaux, on a  $Aa : ab :: Bd : dc$ ; d'où

$$Aa + ab : Bd + dc :: Aa : Bd;$$

ce qui revient à  $Ab : Bc :: Aa : Bd$ ,  
 et à cause de (3), on a  $AH : HB :: Aa : Bd$ ;

cette dernière proportion donne

$$AH - Aa : HB - Bd :: AH : HB,$$

c'est-à-dire  $aH : Hd :: AH : HB$ .

Mais à cause des parallèles  $Ea$ ,  $GH$ ,  $Fd$ , on a aussi

$$aH : Hd :: EO : OF.$$

Donc enfin,  $EO : OF :: AH : HB$ .

On démontrerait de même que  $HO : OG :: BF : FC$ .

**COROLLAIRE** (*fig. 22*). Les proportions (1) et (2) démontrent que si les points  $H$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $E$ , sont les milieux des côtés du quadrilatère  $ABCD$ , le point  $O$  sera le milieu des droites  $GH$ ,  $EF$ .

Il est d'ailleurs facile de s'en assurer directement; car, menez  $EG$ ,  $GF$ ,  $FH$ ,  $HE$ ,  $AC$ ,  $DB$ ; les droites  $EG$ ,  $HF$ , parallèles à  $AC$ , seront parallèles entre elles, ainsi que les droites  $EH$ ,  $GF$ , toutes deux parallèles à  $DB$ ; donc la figure  $EGFH$  sera un parallélogramme, et par conséquent les diagonales  $GH$ ,  $EF$ , se couperont mutuellement en deux parties égales.

**25. THÉORÈME** (*fig. 22*). Dans tout quadrilatère, la droite qui joint les milieux des deux diagonales, et les deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés, se coupent en un même point qui est le milieu de ces trois lignes.

Soit  $ABCD$  un quadrilatère. Par les milieux  $I$ ,  $K$ , des diagonales  $AC$ ,  $BD$ , menez la droite  $IK$ , et tirez une droite par les milieux  $E$ ,  $F$ , des côtés opposés  $AD$ ,  $BC$ ; les deux droites  $EF$ ,  $IK$ , se couperont en deux parties égales. En effet, tirez les droites  $EI$ ,  $IF$ ,  $FK$ ,  $EK$ ; la figure  $EIFK$  sera un parallélogramme, car les côtés  $EI$ ,  $KF$ , parallèles à  $DC$ , sont parallèles entre eux, ainsi que les côtés  $IF$ ,  $EK$ , tous deux parallèles à  $AB$ . Le point  $O$  est donc le milieu des droites  $EF$ ,  $IK$ ; or nous avons vu (n° 24, *Corol.*) que les droites  $EF$ ,  $GH$ , se coupent mutuellement en deux parties égales; les droites  $IK$ ,  $GH$ , passent donc par le milieu de  $EF$ ; ce qui démontre le principe énoncé.

26. THÉORÈME (*fig. 22.*). *Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des deux diagonales est double de la somme des carrés des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.*

Soient, H, F, G, E, les milieux des côtés du quadrilatère ABCD; joignez ces points par des droites; la figure HFGE sera un parallélogramme, et l'on aura  $AC = 2GE$ ,  $BD = 2GF$ .

Mais le théorème du n° 23 donne

$$4\overline{GE}^2 + 4\overline{GF}^2 = 2(\overline{GH}^2 + \overline{EF}^2).$$

$$\text{D'ailleurs, } 4\overline{GE}^2 + 4\overline{GF}^2 = (2GE)^2 + (2GF)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.$$

$$\text{Donc, } \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{GH}^2 + \overline{EF}^2).$$

27. THÉORÈME (*fig. 23.*). *Lorsqu'un quadrilatère est inscrit dans un cercle, le rectangle des deux diagonales est égal à la somme des deux rectangles des côtés opposés.*

Soit ABCD le quadrilatère inscrit; menez la droite CG, sous l'angle  $DCG = BCA$ ; les angles DCA, BCG, seront égaux; d'ailleurs l'angle  $CAD = CBD$ ; les triangles ACD, BCG, sont donc équiangles et semblables. On a donc

$$BC : BG :: AC : AD, \text{ d'où (1)... } AC \times BG = AD \times BC.$$

Les triangles GCD, BCA, étant équiangles, et par conséquent semblables, on a

$$CD : GD :: AC : AB; \text{ d'où (2)... } AC \times GD = AB \times CD.$$

Ajoutant les équations (1) et (2) membre à membre, il vient

$$AC \times BD = AD \times BC + AB \times CD.$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

28. THÉORÈME (*fig. 24.*). *Tout quadrilatère, dans lequel la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés, est circonscriptible au cercle.*

Soit ABCD le quadrilatère donné, et supposons qu'on ait

$$CD + AB = BC + AD.$$

On peut toujours décrire un cercle tangent aux trois côtés AB, AD, BC; à cet effet, il suffit de diviser les angles A, B, en

deux parties égales par les droites AO, BO; le point O d'intersection de ces deux droites est le centre du cercle demandé, car les perpendiculaires OE, OH, OF, sont évidemment égales.

La question se réduit donc à démontrer que la perpendiculaire OG au quatrième côté CD, est égale à OH.

On a, par hypothèse,  $CD + AB = BC + AD$ ,  
et il résulte de la construction que  $AE = AH$ ,  $BE = BF$ .

On en déduit

$$CD + AB - AE = BC + AD - AH, \quad CD + BE = BC + DH, \\ CD = DH + BC - BE = DH + BC - BF = DH + CF.$$

Or,  $CD = DG + GC$ ; donc (1)...  $DH + CF = DG + GC$ .

Dans les triangles rectangles OHD, OFC, les côtés OH, OF, étant égaux, on a

$$\overline{OD}^2 - \overline{DH}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CF}^2; \text{ d'où } \overline{OD}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{DH}^2 - \overline{CF}^2.$$

Les triangles rectangles OGD, OGC, ayant le côté OG commun, donnent  $\overline{OD}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{DG}^2 - \overline{GC}^2$ .

Donc  $\overline{DH}^2 - \overline{CF}^2 = \overline{DG}^2 - \overline{GC}^2$ , ou

$$(DH + CF)(DH - CF) = (DG + GC)(DG - GC).$$

Or, (1)...  $DH + CF = DG + GC$ ;

donc (2)...  $DH - CF = DG - GC$ .

Ajoutant les équations (1) et (2), il vient  $DH = DG$ .

Les triangles rectangles DOH, DOG, sont donc égaux; on a donc  $OG = OH$ . Ce qui démontre le théorème énoncé.

*La réciproque est vraie.*

**29. THÉORÈME** (*fig. 25, 1°*). Soit ABCD un quadrilatère; si l'on décrit quatre cercles, de manière que chacun d'eux soit tangent intérieurement à trois côtés du quadrilatère, les centres de ces quatre cercles seront sur une même circonférence.

En effet, tirez des droites AF, BF, CH, DH, (*fig. 25, 1°*), qui divisent les angles A, B, C, D, en deux parties égales, elles se couperont respectivement en quatre points F, G, H, E, qui



seront les centres des quatre cercles tangens intérieurement à trois côtés du quadrilatère.

Il s'agit de prouver que ces quatre points sont sur une même circonférence. Cela revient à démontrer que le quadrilatère EFGH est inscriptible dans un cercle; c'est-à-dire que la somme de deux de ses angles intérieurs opposés est égale à deux angles droits. Or, on a (*fig. 25, 1°*),

$$A + B + C + D = 200^\circ,$$

$$\text{angle } AED = 200^\circ - \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} D = \text{HEF},$$

$$\text{angle } BGC = 200^\circ - \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} C = \text{HGF}.$$

$$\text{Donc, } \text{HEF} + \text{HGF} = 400^\circ - \frac{1}{2} (A + B + C + D) = 200^\circ.$$

Ce qui démontre la propriété énoncée.

REMARQUE (*fig. 25, 2°*). Si l'on prolonge indéfiniment les quatre côtés d'un quadrilatère ABCD, et si l'on décrit quatre cercles de manière que chacun d'eux soit tangent extérieurement à l'un des côtés du quadrilatère et aux prolongemens de deux autres côtés, les centres E, F, G, H, de ces quatre cercles seront pareillement sur une circonférence. Pour démontrer cette propriété, il suffit de remplacer les angles intérieurs A, B, C, D, du quadrilatère ABCD, par leurs supplémens.

## PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE.

### § II. Construction de Lignes proportionnelles et de Rectangles.

30. PROBLÈME (*fig. 26*). Construire une quatrième proportionnelle géométrique à trois lignes données,  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ .

Sur deux droites indéfinies, ME, MF, qui font entre elles un angle quelconque, prenez des parties MA =  $\alpha$ , MB =  $\zeta$ , MC =  $\gamma$ ; tirez AB, et conduisez une parallèle CD à AB. La longueur MD sera la ligne cherchée, car les triangles semblables MAB, MCD, donnent, MA : MB :: MC : MD, ou  $\alpha : \zeta :: \gamma : \text{MD}$ .

REMARQUE. Lorsqu'on veut trouver deux lignes proportionnelles à deux lignes données,  $\alpha$ ,  $\zeta$ , on prend arbitrairement

la longueur  $\gamma$ ; la construction précédente détermine la valeur correspondante de MD;  $\gamma$  et MD sont les lignes demandées.

31. PROBLÈME (fig. 27). Construire une moyenne proportionnelle géométrique entre deux lignes données,  $a$ ,  $c$ .

Tirez une droite CD; prenez des parties  $PA = a$ ,  $PB = c$ ; sur AB comme diamètre décrivez une demi-circonférence, et menez une perpendiculaire PN à CD. La partie PE de cette perpendiculaire comprise dans le demi-cercle, sera la ligne demandée; car en tirant les cordes AE, BE, les triangles rectangles semblables, APE, EPB, donnent

$$PA : PE :: PE : PB, \text{ ou } a : PE :: PE : c.$$

32. PROBLÈME (fig. 28). Connaissant la différence  $d$  de la diagonale au côté d'un quarré, construire ce quarré.

Faites un quarré quelconque ABCD; menez la diagonale AC; prenez  $AF = d$ ,  $CE = CD$ ; tirez DE, et menez FG parallèle à DE. Je dis que AG sera le côté du quarré demandé; en effet, sur AG, comme côté, construisez le quarré AGHM; les triangles semblables CDE, HGF, donneront  $CD : CE :: HG : HF$ .

Mais,  $CE = CD$ ; donc  $HF = HG$ .

On en déduit,  $AH - HG = AH - HF = AF = d$ .

Le quarré AGHM jouit donc de la propriété demandée.

33. PROBLÈME (fig. 29). Construire un quarré qui soit équivalent à  $n$  fois un quarré donné  $a^2$ .

Le côté inconnu  $x$  du quarré demandé pouvant être considéré comme une moyenne géométrique entre  $a$  et  $na$ , on prendra sur une droite indéfinie MN, deux parties  $PA = a$ ,  $PC = na$ ; sur AC comme diamètre, on décrira une demi-circonférence, et l'on tirera une perpendiculaire PG à MN; la droite PF sera le côté du quarré cherché, car le triangle rectangle AFC donne

$$PF^2 = PA \times PC = a \times na = na^2.$$

34. PROBLÈME (fig. 30). Construire un rectangle dont la surface soit équivalente à un quarré donné  $c^2$ , et tel, que la somme ou la différence de deux côtés adjacens soit égale à une ligne connue  $2l$ .

Prenez  $AC = 2l$ ; sur  $AC$  comme diamètre, décrivez une circonférence; menez  $CD$  perpendiculaire à  $CA$ , et prenez  $CT = c$ . Cela posé:

1°. Si la *somme* des côtés adjacens du rectangle doit être égale à  $2l$ , tirez  $TF$  parallèle à  $CA$ , et  $FP$  perpendiculaire à  $CA$ . Je dis que  $AP$  et  $CP$  seront les côtés du rectangle demandé; car

$$AP + CP = AC = 2l, \text{ et l'on a } AP \times CP = \overline{FP}^2 = \overline{CT}^2 = c^2.$$

REMARQUE. Pour que cette construction réussisse, et que par conséquent le problème soit possible, il faut et il suffit que la droite  $TF$  rencontre la circonférence décrite avec le rayon  $OA = OC = l$ ; ce qui exige que  $CT$ , ou  $c$ , ne soit pas plus grand que  $\frac{1}{2} AC$  ou que  $l$ . Il faut donc que  $c = l$ , ou que  $c < l$ .

Quand on ne donne que le périmètre  $4l$  du rectangle, sa surface  $c^2$  peut varier; mais la plus grande valeur de cette surface, c'est-à-dire son *maximum*, est  $l^2$ , c'est-à-dire le quarré construit sur le quart du périmètre.

Il en résulte que *le plus grand de tous les rectangles de même périmètre est le quarré*.

On peut le démontrer directement; car le périmètre étant  $4l$ , si l'un des côtés du rectangle est  $l + x$ , le côté adjacent sera  $l - x$ ; la surface de ce rectangle sera  $(l + x) \times (l - x)$  ou  $l^2 - x^2$ , et le *maximum* de cette surface a lieu quand  $x = 0$ , c'est-à-dire quand les côtés du rectangle sont égaux.

Lorsqu'on ne donne que la surface  $c^2$  du rectangle, le périmètre  $4l$  de ce rectangle est *variable*; mais le *minimum* de  $4l$  est  $4c$ , et le rectangle devient un quarré.

Ainsi, *de tous les rectangles de même surface, celui qui a le plus petit périmètre est le quarré*.

2°. Si la *différence* des côtés adjacens du rectangle doit être  $2l$ , tirez la droite  $TOB$ . Je dis que  $TB$  et  $TK$  seront les côtés adjacens du rectangle cherché; car  $TB - TK = BK = 2l$ , et  $TC$  étant une tangente au cercle  $OC$ , on sait que

$$TB : TC :: TC : TK; \text{ d'où } TB \times TK = \overline{TC}^2 = c^2.$$

Ce problème est toujours possible.

35. PROBLÈME (*fig. 31*). Trois droites  $MN$ ,  $PQ$ ,  $RS$ , se coupant deux à deux en  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , construire un quarré qui ait deux sommets sur  $MN$ , et dont les deux autres sommets soient respectivement sur  $PQ$  et  $RS$ .

Construisez sur  $BC$  le quarré  $BCKD$ ; tirez la droite  $AD$  qui coupera  $BC$  en  $E$ ; menez  $EF$  perpendiculaire sur  $BC$ . Je dis que  $EF$  sera le côté du quarré cherché; c'est-à-dire que si l'on mène  $FG$  perpendiculaire à  $EF$ , on aura  $FG = EF$ . En effet, les perpendiculaires  $FG$ ,  $BC$ , à  $EF$ , sont parallèles, et les perpendiculaires  $EF$ ,  $DB$ , à  $BC$ , sont aussi parallèles; donc  $FG : BC :: AF : AB :: EF : DB$ . Or,  $BC = DB$ ; donc  $FG = EF$ .

Si l'on construit sur  $BC$  un autre quarré  $BCK'D'$ , et si l'on tire par les points  $D'$ ,  $A$ , une droite qui rencontre  $MN$  en  $E'$ , la perpendiculaire  $E'F'$  à  $MN$  sera le côté d'un deuxième quarré  $E'F'G'H'$  qui satisfera à la question. On le démontrerait par des raisonnemens analogues aux précédens.

### § III. *Constructions de droites assujetties à des conditions données.*

36. PROBLÈME. *Mener une tangente commune à deux cercles.*

Soit  $Tt$  la tangente demandée qui touche les cercles  $CD$ ,  $cd$ , (*fig. 32*) aux points  $T$ ,  $t$ , et dont le prolongement rencontre en  $B$  la droite  $MN$  menée par les centres,  $C$ ,  $c$ . Si le point  $B$  était connu, la question serait ramenée à conduire par ce point une tangente à l'un des cercles, cette droite serait tangente à l'autre cercle. Il suffit donc de déterminer la distance  $CB$ . Pour y parvenir, on tire une parallèle  $cp$  à  $BT$ ; les rayons  $CT$ ,  $ct$ , étant perpendiculaires à la tangente  $BT$ , sont parallèles, et les triangles semblables  $Cpc$ ,  $CTB$ , donnent

$$Cp : CT :: Cc : CB, \text{ ou (1) } \dots CT - ct : CT :: Cc : CB.$$

Or, on connaît les rayons  $CT$ ,  $ct$ , et la distance  $Cc$  des centres; la proportion (1) déterminera donc  $CB$ .

Menant par le point  $B$  deux tangentes  $BT$ ,  $BT'$ , à l'un des cercles, elles seront tangentes à l'autre cercle.

**REMARQUE.** La proportion qui donne CB, exprime seulement que les rayons CT, ct, sont parallèles. Par conséquent, si l'on tire une droite par les extrémités D, d, de deux rayons parallèles quelconques CD, cd, situés d'un même côté de MN, cette droite rencontrera MN au même point que la tangente commune aux deux cercles (\*). Ce qui fournit un moyen très simple de construire le point B.

Il est facile de voir qu'on peut encore mener deux autres tangentes communes TB't, T'B't', (fig. 33)', aux cercles donnés. Pour trouver le point B' où la tangente Tt coupe la droite Cc qui joint les centres C, c, on tirera la droite CTA, et l'on conduira une parallèle cE à tT; les triangles semblables Cpc, CTB' donneront

$$Cp : CT :: Cc : CB', \text{ ou } CT + ct : CT :: Cc : CB'.$$

Cette dernière proportion déterminera l'inconnue CB'.

On verra, par des raisonnemens analogues à ceux de la remarque précédente, que pour construire le point B', il suffit de tirer une droite Dd, par les extrémités D, d, de deux rayons parallèles quelconques CD, cd, situés de part et d'autre de MN; cette droite rencontrera MN au point B' cherché; et en tirant par ce point deux tangentes Tt, T't', à l'un des cercles, elles seront tangentes à l'autre cercle.

Cela posé : lorsque les cercles sont extérieurs l'un à l'autre et n'ont aucun point commun, les constructions précédentes déterminent les quatre tangentes communes que l'on peut mener à ces deux cercles.

Si l'on conçoit ensuite que les cercles se meuvent de manière que leurs centres, c, C, se rapprochent, les cercles deviendront tangens extérieurement, et les deux tangentes TB't, T'B't', se réuniront en une seule; ensuite, les cercles se cou-

(\*) On peut d'ailleurs s'en assurer, car en tirant la parallèle cq à BD, les triangles semblables Cqc, CDB, donnent

$$Cq : CD :: Cc : CB, \text{ ou } (2) \dots CD - cd : CD :: Cc : CB,$$

et les proportions (1), (2), fournissent évidemment la même valeur de CB.

## DE GÉOMÉTRIE.

pant, il n'existera plus que deux tangentes communes; les centres continuant à se rapprocher, les cercles deviendront tangens intérieurement, et les deux tangentes précédentes se confondront; enfin, quand les cercles seront l'un dans l'autre, ils n'auront plus de tangente commune.

37. PROBLÈME (*fig. 34*). *Sur une droite MN, mener une perpendiculaire SS' telle, que la différence des quarrés des distances de l'un de ses points aux extrémités M et N, soit égale à un quarré connu  $\delta^2$ .*

Soit P le point de SS' qui jouit de la propriété demandée; si l'on tire les droites PM, PN, et si l'on suppose  $PM > PN$ , on devra avoir,  $\overline{PM}^2 - \overline{PN}^2 = \delta^2$ .

$$\text{Or,} \quad \overline{PM}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{PQ}^2, \quad \overline{PN}^2 = \overline{NQ}^2 + \overline{PQ}^2;$$

$$\text{on en déduit,} \quad \overline{PM}^2 - \overline{PN}^2 = \overline{QM}^2 - \overline{QN}^2.$$

Cette dernière égalité ne contenant pas la distance PQ du point P à la droite MN, il en résulte que si l'on détermine le pied Q de la perpendiculaire SS' à MN, de manière que  $\overline{MQ}^2 - \overline{NQ}^2 = \delta^2$ , tous les points de cette perpendiculaire jouiront de la propriété demandée.

La question est donc réduite à *déterminer sur la droite donnée MN, un point Q tel que l'on ait*

$$(1) \dots \overline{MQ}^2 - \overline{NQ}^2 = \delta^2.$$

$$\text{Or,} \quad \overline{MQ}^2 - \overline{NQ}^2 = (MQ + NQ)(MQ - NQ) = MN \times (MQ - NQ).$$

D'ailleurs, en prenant le milieu F de MN, on a

$$MQ = MF + FQ, \quad NQ = NF - FQ = MF - FQ; \text{ d'où}$$

$$MQ - NQ = 2FQ.$$

La relation (1) se réduit donc à

$$MN \times 2FQ = \delta^2; \text{ d'où } 2MN : \delta : \delta : FQ.$$

La distance inconnue FQ est donc une troisième proportionnelle géométrique aux deux lignes connues  $2MN$ ,  $\delta$ .

Suivant que la valeur  $\frac{\delta^2}{2MN}$  de FQ est inférieure, égale ou supérieure à  $\frac{1}{2} MN$ , on en déduit  $\delta < MN$ , ou  $\delta = MN$ , ou  $\delta > MN$ .

Réciproquement, selon qu'on a  $\delta < MN$ , ou  $\delta = MN$ , ou  $\delta > MN$ , on peut en conclure que la valeur de FQ est inférieure, égale ou supérieure à  $\frac{1}{2} MN$ ; de sorte que le point cherché Q tombe entre F et N, ou en N, ou sur le prolongement NH de MN.

On peut encore construire la perpendiculaire demandée, de cette autre manière : prenez  $MA = \delta$ ; menez AD perpendiculaire à MN, et portez sur AD une partie AC telle que les arcs décrits des points M, N, comme centres avec les rayons MC, CA, se coupent en un point P; la perpendiculaire PQ à MN, jouira de la propriété demandée; car, d'après la construction, on a

$$MP = MC, NP = CA, \overline{PM}^2 - \overline{PN}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{MA}^2 = \delta^2.$$

**38. PROBLÈME (fig. 35).** *Connaissant deux points A, B, et une droite GH, tirer deux droites AC, BC, qui se coupent sur GH, de manière que l'angle  $\angle ACG = \angle BCH$ .*

Menez BF perpendiculaire sur GH; prenez  $DE = DB$ ; tirez AE; le point C, où AE coupe GH, jouit de la propriété demandée. En effet, si l'on mène BC, les triangles rectangles CDB, CDE, seront égaux; les angles BCH, ECH, seront donc égaux. Mais, l'angle  $\angle ECH = \angle ACG$ ; donc l'angle  $\angle ACG = \angle BCH$ .

**39. PROBLÈME (fig. 35).** *Étant donnés deux points B, N, dans un angle connu HMT, mener par ces points des lignes BC, NQ, telles, qu'en tirant la droite CQ, les angles BCH, QCM, soient égaux entre eux, ainsi que les angles CQM, NQT.*

Menez BF et NK respectivement perpendiculaires sur HM et MT; prenez  $DE = DB$ ,  $RP = RN$ ; la droite EP coupera les côtés de l'angle donné en C et Q. Les lignes BC, CQ, NQ, satisferont aux conditions du problème; en effet, les triangles rectangles BDC, EDC, sont égaux; donc l'angle  $\angle BCH = \angle ECH = \angle QCM$ . On prouverait de même que les angles CQM, NQT, sont égaux.

**REMARQUE.** Les deux questions précédentes servent de fondement à la *théorie du jeu de billard*. En effet, on a reconnu par l'expérience qu'une *bille* qui vient frapper une *bande* de billard sous un certain angle, s'en éloigne ensuite sous le même angle; une bille qui, partant du point B (*fig. 35*), frapperait la *bande* MH en C, rencontrerait donc une bille placée en A; car elle suivrait la route BCA, pour laquelle l'angle BCH d'*incidence* est égal à l'angle MCQ de *réflexion*.

On verra de même qu'en regardant MH et MT comme les bandes d'un billard, une bille qui, partant du point B, frapperait la bande MH en C, suivrait la route BCAQN; elle rencontrerait donc une bille placée en N.

**40. PROBLÈME** (*fig. 36*). Par un point M, donné hors de l'angle connu BAC, mener une droite MN, de manière que les parties MN, MP, soient entre elles dans le rapport de deux lignes données,  $m, n$ .

Tirez la droite AM, et prenez sur cette droite un point D tel, que vous ayez,  $m : n :: MA : MD$ . Menez DP parallèle à AB; la droite MPN jouira de la propriété demandée. En effet, DP étant parallèle à AB, on a  $MN : MP :: MA : MD$ .

Mais,  $MA : MD :: m : n$ ; donc,  $MN : MP :: m : n$ .

**41. PROBLÈME** (*fig. 37*). Par un point M, pris hors de l'angle BAC, mener une droite MN telle, que le rectangle  $MN \times MP$  des parties MN, MP, soit équivalent au quarré donné  $\delta^2$ .

Tirez MS perpendiculaire à AC, et prenez sur MS une partie MQ telle, que vous ayez

$$MR : \delta :: \delta : MQ; \text{ d'où } MR \times MQ = \delta^2.$$

Sur MQ comme diamètre, décrivez une circonférence qui coupera AB en N et N'; les droites MN, MN', résoudre-  
ment la question; car en tirant la corde NQ, les triangles rectangles MRP, MNQ, étant semblables, on a

$$MR : MN :: MP : MQ; \text{ d'où } MN \times MP = MR \times MQ = \delta^2;$$

et l'on prouverait de même que  $MN' \times MP' = \delta^2$ .



Lorsque la circonférence décrite sur  $MQ$  comme diamètre, coupe  $AB$  en deux points  $N, N'$ , le problème admet deux solutions; quand cette circonférence n'a qu'un point commun avec  $AB$ , il n'y a qu'une solution; enfin, lorsque la circonférence ne rencontre pas  $AB$ , le problème est impossible.

42. PROBLÈME (fig. 38). Dans un angle connu  $HBK$ , inscrire une droite  $PQ$  égale à une ligne donnée  $a$ , de manière que l'angle  $PQB$  soit égal à un angle donné  $\delta$ .

Par un point quelconque  $C$  de  $BK$ , menez une droite  $CD$  sous l'angle  $BCD = \delta$ ; prenez  $CS = a$ , et tirez  $SP$  parallèle à  $CB$ ; la parallèle  $PQ$  à  $DC$ , sera la ligne demandée, car

$$\text{l'angle } PQB = DCB = \delta, \text{ et } PQ = SC = a.$$

Cette construction donne le moyen d'inscrire dans un angle donné une perpendiculaire à un des côtés de l'angle, qui soit égale à une ligne donnée, car il suffit de supposer que  $\delta$  est un angle droit.

43. PROBLÈME (fig. 39). Par un point  $M$ , pris sur la droite  $AR$  qui divise l'angle  $BAC$  en deux parties égales, mener une droite de manière que la partie de cette droite comprise dans l'angle donné  $BAC$  soit la plus petite possible.

La perpendiculaire  $S'x'$  à  $AR$ , menée par le point  $M$ , jouit de la propriété demandée. Pour le démontrer, il s'agit de faire voir qu'en tirant par le point  $M$  une oblique quelconque  $Sx$ , on aura  $N'P' < NP$ .

Si l'on mène  $Ar$  perpendiculaire à  $Sx$ , et  $N'Q$  parallèle à  $AC$ , on aura

$$\text{surface } ANP = \frac{1}{2} Ar \times NP, \text{ surface } AN'P' = \frac{1}{2} AM \times N'P',$$

$$\text{surface } ANP = AN'MP + MN'Q + QNN',$$

$$\text{surface } AN'P' = AN'MP + MPP'.$$

D'ailleurs, les triangles,  $AMN'$ ,  $AMP'$ , étant égaux, comme ayant un côté commun adjacent à deux angles égaux, on a  $MN' = MP'$ .

Les triangles  $MN'Q$ ,  $MPP'$ , sont donc égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux. Par conséquent,

*surface*  $ANP = AN'P' + QNN'$ , et *surface*  $ANP > AN'P'$  ;

donc  $Ar \times NP > AM \times N'P'$ .

Or, la perpendiculaire  $Ar$  à  $Sx$ , est plus courte que l'oblique  $AM$ ; il faut donc que  $NP > N'P'$ .

La ligne  $N'P'$  résout donc le problème.

1<sup>re</sup> REMARQUE. *Le triangle  $AN'P'$  est le plus petit de tous les triangles déterminés par les droites menées par le point  $M$  de la droite  $AR$ ; car tout autre triangle  $ANP$  serait plus grand que  $AN'P'$ , de la quantité  $QNN'$ .*

2<sup>e</sup> REMARQUE. L'inégalité, *surface*  $AN'P' < ANP$ , exige seulement que les triangles  $MQN'$ ,  $MPP'$ , soient égaux; or, pour que ces triangles soient égaux, il suffit que  $MN' = MP'$ . Par conséquent, si par un point  $M$ , pris arbitrairement dans l'angle donné  $BAC$  (ce point n'est pas assujéti à se trouver sur la ligne qui divise l'angle  $BAC$  en deux parties égales), on mène une droite  $S'x'$  telle, que les parties  $MN'$ ,  $MP'$ , de cette droite comprises dans l'angle  $BAC$  soient égales entre elles (\*), la surface du triangle  $AN'P'$  sera plus petite que celle de tout autre triangle  $ANP$ , dont la base  $NP$  passerait par le même point  $M$ .

44. PROBLÈME (fig. 39). Par un point  $M$ , pris sur la droite  $AR$  qui divise l'angle  $BAC$  en deux parties égales, mener une droite  $Sx$  de manière que la partie  $NP$  comprise dans l'angle  $BAC$  soit égale à une ligne donnée  $\delta$ .

Sur la droite  $Dy = \delta$  (fig. 40), décrivez un segment  $DGy$ , capable de l'angle donné  $BAC$ ; prenez le milieu  $F$  de l'arc  $DFy$ ; tirez la droite  $Fy$ ; construisez un rectangle  $HIKL$  (fig. 41) équivalent au quarré fait sur  $Fy$ , et tel que vous ayez  $HI = IK = AM$  (n° 34, 2°); du point  $F$  comme centre, avec le rayon  $HI$ ,

(\*) Pour tirer par le point  $M$  une droite  $N'P'$  telle que  $MN' = MP'$ , conduisez par ce point, la parallèle  $ME$  à  $CA$ ; prenez  $EN' = EA$ ; la droite  $S'x'$  menée par les points,  $N'$ ,  $M$ , jouira de la propriété demandée; car  $ME$  étant parallèle à  $P'A$ , on a

$$MP' : MN' :: EA : EN'; \text{ or, } EN' = EA; \text{ donc } MN' = MP'.$$

décrivez l'arc  $rp$ ; cet arc coupera l'arc  $DGy$  en un point  $G$ ; tirez  $GD$ , et prenez  $AN = GD$ .

La droite  $Sx$ , menée par les points  $N$ ,  $M$ , jouira de la propriété demandée. En effet, tirez  $GF$  et  $Gy$ ; les angles  $FGy$ ,  $DyF$ , sont égaux, car ils ont pour mesure les moitiés des arcs égaux  $Fy$ ,  $DF$ ; les triangles  $GFy$ ,  $OFy$ , ont donc un angle égal et un angle commun; ils sont donc semblables; on a donc

$$GF : Fy :: Fy : FO; \text{ d'où } GF \times FO = \overline{Fy}^2$$

$$\text{Or, } \overline{Fy}^2 = HIKL = HI \times IK;$$

donc  $GF \times FO = HI \times IK$ . Or,  $GF = HI$ ; donc  $FO = IK$ .

On en déduit,  $GO = GF - FO = HI - IK = AM$ .

Mais,  $AN = GD$ ,  $AM = GO$ , et les angles  $NAM$ ,  $DGO$ , sont égaux; les triangles  $NAM$ ,  $DGO$ , sont donc égaux; les angles  $ANP$ ,  $GDy$ , sont donc égaux. Or, les angles  $NAP$ ,  $DGy$ , sont égaux par construction; les triangles  $ANP$ ,  $GDy$ , sont donc égaux; donc enfin,  $NP = Dy = \delta$ .

L'arc  $rp$ , décrit de  $F$  comme centre avec le rayon  $HI$ , coupe l'arc  $DGy$  en un second point  $G'$  qui fournit une seconde solution du problème.

Pour obtenir cette nouvelle solution, il suffit de conduire par le point donné  $M$  (*fig. 39*), une droite  $P'N'$  perpendiculaire sur  $AR$ , et de prendre  $N'p = P'P$ ; la droite  $pn$ , menée par les points  $p$ ,  $M$ , résout le problème. En effet, les triangles  $MN'p$ ,  $MP'P$ , sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux; donc  $Mp = MP$ , et l'angle  $MpN = MPn$ ; d'ailleurs l'angle  $NMp = nMP$ ; les triangles  $MpN$ ,  $MPn$ , sont donc égaux; donc  $MN = Mn$ . Or,  $MP = Mp$ ; donc  $np = NP = \delta$ .

REMARQUE. La perpendiculaire  $P'N'$  à  $AM$  étant la plus courte de toutes les lignes qui, passant par le point  $M$ , sont inscrites dans l'angle  $BAC$  (*n° 43*), et ces lignes pouvant croître indéfiniment, il en résulte que, selon que  $\delta$  sera plus grand que  $P'N'$  ou égal à  $P'N'$ , ou moindre que  $P'N'$ , le problème admettra deux solutions, ou une seule solution, ou sera impossible.

45. PROBLÈME (fig. 42). *Par un point donné M, mener une droite telle, que la partie de cette droite comprise entre deux parallèles connues CB, PQ, soit égale à une ligne donnée  $\delta$ .*

D'un point quelconque V de PQ, comme centre, avec le rayon  $\delta$ , décrivez un arc qui coupera CB en G et H; tirez les droites VG, VH; les parallèles FE, ST, à ces droites, menées par le point M, résoudreont le problème; car les parallèles comprises entre parallèles étant égales, on aura

$$FE = VG = \delta \text{ et } ST = VH = \delta.$$

REMARQUE. La perpendiculaire VR à BC, étant la plus courte distance des parallèles CB, PQ, il en résulte que, suivant que la ligne donnée  $\delta$  sera plus grande que VR, ou égale à VR, ou plus petite que VR, le problème admettra deux solutions, ou une seule solution, ou sera impossible. La position du point donné M est d'ailleurs arbitraire.

46. PROBLÈME (fig. 43). *Par un point M, pris dans l'angle BAC, mener une sécante ST telle, que la somme des segmens AF, AG, soit égale à une ligne donnée  $\delta$ .*

Menez MD et ME respectivement parallèles aux côtés CA, BA, de l'angle donné; construisez un rectangle HIKL (fig. 41) équivalent au rectangle des lignes AD, AE, et tel que

$$HI + IK = \delta - (AD + AE), \quad (\text{n}^{\circ} 34, 1^{\circ}); \text{ vous aurez}$$

$$HI \times IK = AD \times AE = ME \times MD.$$

Prenez DF = HI; la droite ST, menée par les points connus F, M, sera la sécante demandée. En effet, MD et ME étant respectivement parallèles aux droites CA, BA, les triangles FDM, MEG, sont semblables; on a donc

$$DF : MD :: ME : EG; \text{ d'où } DF \times EG = ME \times MD.$$

Mais,  $ME \times MD = HI \times IK$  et  $DF = HI$ ; donc

$$DF \times EG = HI \times IK = DF \times IK; \text{ d'où } EG = IK.$$

On en déduit,  $DF + EG = HI + IK = \delta - (AD + AE)$ ,  
et  $(DF + AD) + (EG + AE) = \delta$ ; ou  $AF + AG = \delta$ .

La sécante ST résout donc le problème.

Si l'on prend  $DF' = IK$  (*fig. 43 et 41*), la sécante  $S'T'$ , menée par les points  $F'$ ,  $M$ , résoudra également le problème. En effet, les triangles semblables  $F'DM$ ,  $MEG'$ , donnent  $DF' : DM :: EM : EG'$ .

On en déduit,  $DF' \times EG' = DM \times EM = IH \times IK$ .

Or, par construction,  $DF' = IK$ ; donc  $EG' = IH$ .

Il en résulte,  $EG' + DF' = IH + IK = \delta - (AD + AE)$ ,

$(EG' + AE) + (DF' + AD) = \delta$ , ou  $AG' + AF' = \delta$ .

La sécante  $S'T'$  jouit donc de la propriété demandée.

REMARQUE. La somme  $\delta$ , des segmens  $AF$ ,  $AG$ , peut croître indéfiniment; mais on voit que cette somme a une limite de décroissement; il y aura donc des cas dans lesquels le problème sera impossible. On en sera averti par l'impossibilité de construire le rectangle  $HIKL$  (*fig. 41*).

47. PROBLÈME (*fig. 43*). Par un point  $M$ , pris dans l'angle  $BAC$ , mener une sécante  $ST$  telle, que la différence  $AF - AG$  des segmens  $AF$ ,  $AG$ , soit égale à une ligne connue  $\delta$ .

Menez des parallèles  $MD$ ,  $ME$ , à  $CA$  et à  $BA$ ; construisez (n° 34) un rectangle  $HIKL$  (*fig. 41*) équivalent au rectangle  $MD \times ME$ , et tel que

$$IH - IK = \delta + MD - ME = \delta + AE - AD.$$

Prenez  $DF = IH$ ; la droite  $ST$ , menée par les points  $F$ ,  $M$ , sera la sécante demandée. En effet, les triangles semblables  $DMF$ ,  $EGM$ , donnent

$$DF \times EG = MD \times ME.$$

Mais,  $MD \times ME = IH \times IK$ ;

donc,  $DF \times EG = IH \times IK$ ; or,  $DF = IH$ ; donc

$$EG = IK, \quad DF - EG = IH - IK = \delta + AE - AD,$$

$$\delta = (AD + DF) - (EG + AE) = AF - AG.$$

La ligne  $ST$  est donc la sécante demandée.

Le problème est toujours possible, car il est évident que la

différence  $AF - AG$  peut passer par tous les états de grandeur, depuis zéro jusqu'à l'infini.

Cette construction suppose que  $\delta + AE > AD$ .

Si  $\delta + AE$  était moindre que  $AD$ , on construirait un rectangle  $HIKL$  (*fig. 41*), équivalent au rectangle des lignes  $MD$ ,  $ME$ , et tel que l'on eût

$$HI - IK = AD - (\delta + AE).$$

Prenant  $DF = IK$ , la droite  $ST$  menée par les points  $F$  et  $M$  serait la sécante demandée; car on aurait

$$DF \times EG = MD \times ME = IK \times IH; \text{ or, } DF = IK; \text{ donc,}$$

$$EG = IH, \text{ IH} - IK = EG - DF = AD - (\delta + AE),$$

$$\delta = (AD + DF) - (EG + AE) = AF - AG.$$

Si  $\delta + AE$  était égal à  $AD$ , le rectangle  $HIKL$  deviendrait un carré, et la construction serait la même.

**REMARQUE.** Par le point  $M$ , on peut mener une autre sécante qui jouisse de la propriété demandée. En effet, construisez un rectangle  $HI'K'L'$  (*fig. 41*), équivalent au rectangle des lignes  $MD$ ,  $ME$ , et tel que

$$I'H - I'K' = \delta + AD - AE, \text{ (n}^\circ 34, 2^\circ).$$

Prenez  $DF' = I'K'$ , et tirez la droite  $F'MG'$ ; vous aurez

$$DF' : DM :: EM : EG'; \text{ d'où } DF' \times EG' = MD \times ME = I'H \times I'K'.$$

Mais, par construction,  $DF' = I'K'$ ; donc,  $EG' = I'H$ ; donc

$$EG' - DF' = I'H - I'K' = \delta + AD - AE; \text{ d'où}$$

$$\delta = (EG' + AE) - (DF' + AD) = AG' - AF'.$$

La sécante  $S'T'$  jouit donc de la propriété demandée.

**48. PROBLÈME** (*fig. 44*). Par le sommet  $A$  d'un angle donné  $BAC$ , tirer une droite  $AD$  telle, qu'en menant par l'un quelconque de ses points des droites  $MP$ ,  $MQ$ , formant des angles connus  $\alpha$ ,  $\beta$ , avec les côtés  $AC$ ,  $AB$ , ces droites soient dans le rapport constant de deux lignes connues,  $\gamma$ ,  $\delta$ .

Par deux points  $E$ ,  $F$ , pris arbitrairement sur les côtés  $AC$ ,

AB, menez des droites ES, FR, qui forment avec AC et AB, les angles  $AES = \alpha$ ,  $AFR = \zeta$ ; prenez  $EG = \gamma$ ,  $FH = \delta$ ; tirez GK et HK respectivement parallèles à CA et à BA; ces lignes se couperont en un point K; la droite AK, indéfiniment prolongée, jouira de la propriété demandée. En effet, menez KL et KN respectivement parallèles aux lignes GE, HF; vous aurez  $KL = GE = \gamma$ ,  $KN = HF = \delta$ ,  $\text{angle ALK} = \alpha$ ,  $\text{angle ANK} = \zeta$ .

Par un point quelconque M de AD, menez des parallèles MP, MQ, à KL et à KN; ces parallèles formeront avec AC et AB des angles égaux aux angles donnés  $\alpha$ ,  $\zeta$ ; et les propriétés des triangles semblables donneront

$$AM : AK :: MP : KL :: MQ : KN; \text{ donc}$$

$$MP : MQ :: KL : KN :: \gamma : \delta.$$

La droite AD jouit donc des propriétés demandées.

Ce problème est toujours possible, car les droites AB, AC, se coupant, les parallèles GK, HK, à ces lignes se coupent nécessairement.

49. PROBLÈME (fig. 17). Par un point M, pris sur la circonférence MB'D', mener une droite MSV d'une grandeur et d'une position telles, que les parties SM, SV, soient dans le rapport connu de  $\alpha$  à  $\zeta$ , et que le rectangle  $SM \times SV$  de ces mêmes parties soit équivalent au carré donné  $\delta^2$ .

Menez le diamètre MF' du cercle donné; prolongez ce diamètre d'une quantité F'E telle, que vous ayez  $\alpha : \zeta :: F'M : F'E$ . Sur ME comme diamètre, décrivez la circonférence MAXC dont le centre est O; cette circonférence sera tangente en M au cercle donné (n° 15), et si vous conduisez par le point M des sécantes quelconques MA, MC, MV, vous aurez (remarque du n° 19)

$$B'M : B'A :: D'M : D'C :: SM : SV :: F'M : F'E :: \alpha : \zeta.$$

Tirez une corde  $MX = 2\delta$ , et du point O comme centre, décrivez une circonférence Str tangente à MX en t; le point t de tangence sera le milieu de MX, et la circonférence Str coupera

la circonférence donnée en deux points  $S, S'$ . Par les points  $M$  et  $S$ , menez une droite  $MS$ , que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence  $OE$  en  $V$ ; la droite  $MV$  jouira des propriétés demandées. En effet, menez par le point  $S$  une tangente  $NQ$  à la circonférence  $OS$ , vous aurez

$$NQ = MX = 2\delta; \text{ d'où } SQ = SN = \delta, \quad SQ \times SN = \delta^2.$$

Mais, les cordes  $MV, NQ$ , se coupant en  $S$ , on a

$$SQ : SM :: SV : SN; \text{ d'où } SQ \times SN = SM \times SV.$$

$$\text{Donc, } SM \times SV = \delta^2. \text{ Or, } SM : SV :: a : 6.$$

La droite  $MV$  satisfait donc aux conditions du problème.

On prouverait de même que la droite  $MS'V'$ , menée par les points  $M, S'$ , jouit des propriétés demandées.

**50. PROBLÈME** (*fig. 45*). *Par un point  $D$ , donné dans un cercle  $OS$ , mener la plus petite corde possible.*

La perpendiculaire  $ADB$  à  $OD$  est la corde demandée; car en tirant une autre corde  $CDF$ , et en menant une perpendiculaire  $OH$  à  $CF$ , on aura  $OD > OH$ ; donc  $AB < CF$ .

**51. PROBLÈME** (*fig. 45*). *Par un point  $P$ , pris hors du cercle  $OS$ , mener une sécante de manière que la partie interceptée dans le cercle soit égale à une ligne connue  $\delta$ .*

Dans le cercle  $OS$ , inscrivez une corde  $AB = \delta$ ; menez  $OD$  perpendiculaire à  $AB$ , et du point  $O$  comme centre, avec le rayon  $OD$ , décrivez une circonférence  $DTT'$ ; les tangentes  $PC, PC'$ , à cette circonférence, seront les sécantes demandées; car, soient  $T$  et  $T'$  les points de tangence, en tirant les rayons  $OT, OT'$ , on aura

$$OT = OT' = OD; \text{ d'où } CE = C'E' = AB = \delta.$$

**REMARQUE.** La même construction subsisterait, si le point donné  $P$  était sur la circonférence ou dans le cercle.

**52. PROBLÈME** (*fig. 45*). *Par un point  $P$ , donné hors d'un cercle  $OS$ , mener une sécante  $PC$  qui soit coupée par la circonférence  $OS$  en moyenne et extrême raison.*



Conduisez la tangente PR au cercle OS; tirez une sécante PC telle, que  $CE = PR$  (n° 51); vous aurez

$$PC : PR :: PR : PE, \text{ ou } PC : CE :: CE : PE.$$

La sécante PC jouit donc de la propriété demandée.

**53. PROBLÈME** (*fig. 46 et 47*). Par un point M, donné hors d'un cercle CA, mener une sécante MN telle, que la partie PN, interceptée dans le cercle, soit à la partie extérieure PM, dans le rapport de deux lignes connues,  $\alpha$ ,  $\zeta$ .

Décrivez deux circonférences qui se touchent en B, et qui soient telles, que le rayon C'B de la plus petite soit égal au rayon CA du cercle donné, et que toutes les cordes BH, BD, etc., menées par le point B, donnent

$$\alpha : \zeta :: BE : ED :: BK : KH :: BQ : QR (*).$$

Du point C' comme centre, avec le rayon C'D=CM, décrivez un arc *rs*; cet arc coupera la circonférence BDH en D; tirez la droite BD; du point M comme centre, avec le rayon MN=BD, décrivez un arc *mn*; cet arc coupera la circonférence donnée en deux points N, N', et les droites MN, MN', résoudre également la question. En effet :

1°. Menez les droites CN, CP, C'E; les triangles CNM, C'BD, sont égaux; les angles CNM, C'BD, sont donc égaux; or,  $CN = C'B$ ; les triangles isocèles CNP, C'BE, sont donc égaux (\*\*); les côtés NP, BE, sont donc égaux.

Or,  $NM = BD$ ; donc  $PM = ED$ .

La proportion,  $BE : ED :: \alpha : \zeta$ , devient  $PN : PM :: \alpha : \zeta$ .

La sécante MN jouit donc de la propriété demandée.

2°. On prouverait de même que la sécante MN' satisfait à la question.

(\*) Pour construire ces circonférences, prolongez le diamètre connu BQ d'une quantité QR telle, que vous ayez,  $\alpha : \zeta :: BQ : QR$ . La proportion du n° 19 donnera,  $BE : ED :: BK : KH :: BQ : QR :: \alpha : \zeta$ .

(\*\*) En effet, l'angle  $CNP = CPN = C'BE = C'EB$ ; les angles NCP, BCE, sont donc égaux; et par conséquent les triangles NCP, BCE, sont égaux.

54. PROBLÈME (*fig. 48*). Connaissant un cercle DA, la sécante indéfinie FB, et un point M de FB, mener une sécante NH telle, que la partie GH comprise dans le cercle soit égale à une ligne donnée  $\delta$ , et que  $NH = NM$ .

Du point A comme centre, avec le rayon  $\delta$ , décrivez l'arc  $rs$ ; cet arc coupera la circonférence en E. Par le point M et le milieu P de l'arc BE, menez la droite PH; du point H comme centre, avec le rayon  $\delta$ , décrivez l'arc  $r's'$ ; cet arc coupera la circonférence en un point G. Par les points connus H, G, tirez la droite HN. Je dis que HN sera la sécante demandée.

Il suffit de prouver que  $NH = NM$ ; car, par construction,  $GH = \delta$ .

Les cordes AE, GH étant égales, les arcs qu'elles soutiennent sont égaux; la mesure de l'angle NMH est donc

$$\frac{1}{2} (PB + GH + GA) = \frac{1}{2} (PE + AE + GA) = \frac{1}{2} GAEP.$$

Mais,  $\frac{1}{2} GAP$  est la mesure de l'angle NHM. Les angles NMH, NHM, sont donc égaux. Les côtés NH, NM, sont donc égaux.

55. PROBLÈME (*fig. 49*). Par un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante telle, que la différence des cordes qui en résultent dans les deux cercles soit égale à une ligne donnée  $\delta$ .

Soient K $\hat{A}$ B et K' $\hat{A}$ B, les deux circonférences qui se coupent en A et B; prenez un point quelconque P sur K' $\hat{A}$ B; tirez AP, PB, AR; construisez un triangle DEF tel, que sa base  $DE = \delta$ , et que les angles FDE, FED, soient égaux aux angles APR, ARP; prenez une corde  $AC = FD$ .

La droite BC sera la sécante demandée, car en tirant la corde AS, vous aurez

$$\angle ASC = 200^\circ - \angle ASB = 200^\circ - \angle ARB = \angle ARP = \angle FED,$$

$$\angle ACB = \angle APB, \text{ ou } \angle ACS = \angle APR = \angle FDE; \text{ donc angle } \angle CAS = \angle DFE.$$

Or,  $AC = DF$ ; les triangles CSA, DEF, sont donc égaux.

Donc  $CS = DE = \delta$ ; mais  $BC - BS = CS$ ; donc  $BC - BS = \delta$ .

La différence des cordes  $BC$ ,  $BS$ , est donc effectivement égale à la ligne donnée  $\delta$ .

56. PROBLÈME (*fig. 49*). *Par un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante telle, que la somme des cordes qui en résultent dans les deux cercles soit égale à une ligne donnée  $\delta$ .*

Supposez que les circonférences se coupent en  $A$  et  $B$ .

Prenez deux points quelconques  $K, K'$ , sur les circonférences; tirez les droites  $KA, KB, K'A, K'B$ ; construisez un triangle  $DEF$  tel, que vous ayez

$$DE = \delta, \text{ angle } FDE = AKB, \text{ angle } FED = AK'B.$$

Tirez une corde  $AM = FD$ . La droite  $MN$ , menée par les points  $M, B$ , sera la sécante demandée. En effet,

$$AM = FD, \text{ l'angle } AMN = AKB = FDE,$$

$$\text{l'angle } ANM = AK'B = FED; \text{ d'où l'angle } MAN = DFE.$$

Les triangles  $AMN, FDE$ , sont donc égaux; donc

$$MN = DE = \delta. \text{ Or, } MB + BN = MN; \text{ donc } MB + BN = \delta.$$

57. PROBLÈME (*fig. 50*). *Étant données deux circonférences concentriques,  $OA, OC$ , le diamètre  $AB$  et un angle  $\alpha$ , mener une sécante  $MN$  qui fasse avec  $AB$  l'angle  $OMN = \alpha$ , et dont les parties  $MR, MN$ , comprises entre le diamètre  $AB$  et les circonférences, soient dans le rapport de deux lignes données,  $\zeta, \gamma$ .*

Par le centre  $O$ , menez une droite quelconque  $OE$ ; prenez  $OD$  de manière que vous ayez

$$\zeta : \gamma :: OC : OD.$$

Sur  $CD$ , décrivez un segment  $DGC$  capable de l'angle donné  $\alpha$ . L'arc  $DGC$  coupera la circonférence  $OA$  en un point  $G$ ; tirez  $GD$ , et conduisez  $OK$  parallèle à  $GD$ ; menez la droite  $GCH$ , prenez  $OM = OH$ , tirez les droites  $OR, ON$ , sous les angles  $MOR = HOC, RON = COG$ ; joignez  $MR$  et  $RN$ ; les triangles  $MOR, RON$ , seront respectivement égaux aux triangles  $HOC, COG$ , comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux. Or,  $GCH$  étant une ligne droite, l'angle  $OCH + OCG = 200^\circ$ ;

donc l'angle  $ORM + ORN = 200^\circ$ . Donc RN est le prolongement de MR. On a donc

$$MR = HC, \quad RN = CG, \quad MR + RN = MN,$$

$$MR : RN :: HC : CG :: OC : CD;$$

d'où

$$MR : MR + RN :: OC : OC + CD,$$

$$MR : MN :: OC : OD :: \epsilon : \gamma.$$

D'ailleurs,  $\text{angle } OMR = OHC = CGD = \alpha$ .

La sécante MN jouit donc des propriétés demandées.

58. PROBLÈME (*fig. 51*). Dans un triangle ABC, mener une droite MN qui coupe deux côtés AB, AC, et le prolongement CE du troisième côté, de manière que les parties DM, DN, soient égales à deux lignes données  $\alpha$ ,  $\epsilon$ .

Menez une droite indéfinie FS; prenez  $FG = \alpha$ ,  $GH = \epsilon$ ; sur FH et GH décrivez des segmens FIH, GKH, capables des angles connus ABC, ACE; par le point H, tirez HI de manière que  $IK = BC$  (n° 55); prenez  $BM = IF$  et  $BN = IH$ .

Je dis que MN sera la droite demandée. En effet, les triangles MBN, FIH, étant égaux, on a

$$MN = FH = \alpha + \epsilon, \text{ et l'angle } DNC = GHK.$$

Mais,  $BN = IH$  et  $BC = IK$ ;

donc  $BN - BC = IH - IK$ , ou  $CN = KH$ .

Or, l'angle  $GKH = DCN$ , et l'angle  $GKH = DNC$ .

Les triangles DCN, GKH, sont donc égaux. Donc,

$$DN = GH = \epsilon. \text{ Mais, } MN = \alpha + \epsilon; \text{ donc } MD = \alpha.$$

La droite MN satisfait donc aux conditions du problème.

#### § IV. Constructions de circonférences qui satisfont à des conditions données.

59. PROBLÈME (*fig. 17*). On propose de décrire une circonférence MB'D', qui touche une circonférence donnée MAC, en un point donné M, de manière qu'en menant par ce point une sécante quelconque MA, les cordes MA, MB', soient dans le rapport de deux lignes connues,  $\alpha$ ,  $\epsilon$ .

Tirez le diamètre ME du cercle donné; on a vu (n° 19) que  
 $MA : MB' :: ME : MF'$ .

Or, on veut que  $MA : MB' :: \alpha : \zeta$ ;

il faut donc que  $\alpha : \zeta :: ME : MF'$ .

Le diamètre MF' du cercle demandé est donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues,  $\alpha$ ,  $\zeta$ , ME. Portant donc sur le diamètre ME, une partie MF', quatrième proportionnelle aux trois lignes  $\alpha$ ,  $\zeta$ , ME, la circonférence MB'D' décrite sur MF' comme diamètre, jouira de la propriété demandée.

60. PROBLÈME (fig. 17). *Décrire une circonférence MCA qui touche le cercle MD'F'B' au point donné M, de manière qu'en menant par ce point une sécante quelconque MA, les parties MB', B'A, soient dans le rapport des lignes données,  $\alpha'$ ,  $\zeta'$ .*

Si ME est le diamètre du cercle demandé, on aura

$$\frac{\alpha'}{\zeta'} = \frac{MB'}{B'A}; \text{ d'où } \frac{\alpha'}{\alpha' + \zeta'} = \frac{MB'}{MB' + B'A} = \frac{MB'}{MA} = \frac{MF'}{ME}, \text{ (n° 19).}$$

Le diamètre ME du cercle demandé est donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues,  $\alpha'$ ,  $\alpha' + \zeta'$ , MF'.

REMARQUE. La solution de ce problème peut d'ailleurs se déduire de celle du précédent, car la proportion

$$\alpha : \zeta :: MA : MB', \text{ donne } \alpha - \zeta : \zeta :: MA - MB' : MB',$$

$$\text{ou} \quad \alpha - \zeta : \zeta :: B'A : MB'.$$

61. PROBLÈME (fig. 52). *Par un point donné M, faire passer une circonférence tangente à deux droites données, AB, AC.*

Le centre du cercle demandé doit se trouver sur la droite AE qui divise l'angle BAC en deux parties égales. Tirez AM, et d'un point quelconque Q de AE, menez QP perpendiculaire sur AB; du point Q comme centre, avec le rayon QP, décrivez un arc; cet arc touchera AB en P, et coupera AM en R; menez MO parallèle à RQ; je dis que le point O sera le centre du cercle demandé. Pour le démontrer, menez OD et OD' respectivement perpendiculaires sur AB et AC; vous aurez  $OD = OD'$ . Les droites PQ, DO, perpendiculaires à BA, sont parallèles; mais

QR et OM sont aussi parallèles. Donc,

$$OD : QP :: OA : QA :: OM : QR.$$

Or,  $QP = QR$  ; donc  $OD = OM = OD'$ .

La circonférence décrite du point O comme centre, avec le rayon OD, passera donc par les points D, M, D', et sera tangente aux droites AB, AC, comme l'exige l'énoncé.

L'arc décrit du point Q comme centre avec le rayon QP, coupant AM en un second point R', si l'on mène MO' parallèle à R'Q, le point O' sera le centre d'un second cercle qui jouira également des propriétés demandées.

La question proposée admet donc deux solutions, lorsque le point M est dans l'intérieur de l'angle BAC.

Si le point donné était sur l'un des côtés AB, AC, en D par exemple, AM tomberait sur AB; QR et QR' coïncideraient avec QP; MO et MO' tomberaient sur DO, et la circonférence décrite du point O comme centre, avec le rayon OD, résoudrait le problème.

Enfin, si le point donné était hors de l'angle BAC, le problème serait évidemment impossible.

**62. PROBLÈME (fig. 53).** *Décrire un cercle qui soit tangent à une droite donnée AB, et qui passe par deux points donnés M, N.*

Tirez MN; par le milieu C de MN, menez SD perpendiculaire à MN; conduisez la droite MD; le centre du cercle demandé sera sur SD; d'un point quelconque Q de SD, menez QP perpendiculaire sur AB, et de ce point comme centre avec le rayon QP décrivez un arc; cet arc touchera AB en P, et coupera MD en R et R'; tirez QR et QR'; par le point M, menez MO et MO' parallèles à RQ et à R'Q; je dis que les points O, O', seront les centres de deux cercles qui satisferont également aux conditions du problème.

Il suffit de prouver que les perpendiculaires OT, O'T', abaissées des points O, O', sur AB, sont respectivement égales à OM et à O'M.

Or, les lignes PQ, TO, T'O', perpendiculaires à AB, sont

parallèles. Donc,

$$\frac{QP}{OT} = \frac{DQ}{DO} = \frac{QR}{OM}, \text{ et } \frac{QP}{O'T'} = \frac{DQ}{DO'} = \frac{QR'}{O'M}.$$

Mais,  $QP = QR = QR'$ ; donc,  $OT = OM$  et  $O'T' = O'M$ .

Il existe donc deux circonférences,  $mMNn$ ,  $m'MNn'$ , qui jouissent des propriétés demandées.

**63. PROBLÈME** (*fig. 54*). *Connaissant une droite AB et un cercle OR, décrire une circonférence qui touche AB en un point donné M, et qui soit tangente au cercle donné.*

Menez, par le point M, la perpendiculaire EK à AB; prenez  $MC = OR$ ; tirez CO, et menez OD sous l'angle  $COD = OCE$ ; la circonférence MST, décrite du point D comme centre avec le rayon DM, satisfera à la question. En effet, les angles COD, OCD, étant égaux, les côtés opposés DC, DO, sont égaux. Mais  $CM = OT$ ; donc  $DM = DT$ . La circonférence décrite du point D comme centre, avec le rayon DM, touchera donc AB en M, et passera par un point T du cercle donné. Or, les trois points O, T, D, sont en ligne droite, et la distance OD des centres est égale à la somme des rayons; les deux cercles OT, DT, se touchent donc extérieurement.

Si l'on voulait que les deux cercles fussent tangens intérieurement, on prendrait  $MC' = OR$ ; on joindrait OC', et l'on mènerait OD' sous l'angle  $C'OD' = OC'E$ ; la circonférence GMK, décrite du point D' comme centre avec le rayon D'M, jouirait des propriétés demandées.

La question proposée admet donc deux solutions.

**64. PROBLÈME** (*fig. 55*). *Deux cercles concentriques CF, CG, étant donnés, décrire une circonférence OM qui soit telle, que, si aux points M et N, où elle rencontre les circonférences données, on mène des tangentes MP, MQ, NT, NR, aux trois circonférences, les angles PMQ, RNT, soient égaux à des angles connus,  $\alpha$ ,  $\beta$ .*

Par deux points quelconques M, L, des circonférences don-

nées, menez des tangentes  $MP$ ,  $BK$ , à ces circonférences, et tirez les droites  $MQ$ ,  $LI$ , sous des angles  $PMQ = \alpha$ ,  $BLI = \zeta$ ; conduisez  $MS'$  et  $VLH$ , perpendiculaires aux lignes  $MQ$ ,  $LI$ ; menez à la circonférence  $CF$ , une sécante  $ON$  telle, que vous ayez  $NS = LH$  et  $ON = OM$  (\*). La circonférence  $NMED$ , décrite du point  $O$  comme centre, avec le rayon  $OM$ , résoudra le problème. En effet, la droite  $MQ$ , perpendiculaire au rayon  $MO$ , est tangente à la circonférence  $OM$ ; l'angle  $PMQ$  formé par les deux tangentes  $MP$ ,  $MQ$ , est égal à l'angle donné  $\alpha$ ; et si, par le point  $N$ , on mène les droites  $NT$ ,  $NR$ , tangentes aux circonférences  $CF$ ,  $ON$ , l'angle  $TNR$  sera égal à l'angle donné  $\zeta$ , car les cordes  $NS$ ,  $LH$ , étant égales, les angles  $TNO$ ,  $HLK$ ,  $BLV$ , sont égaux; leurs compléments  $TNR$ ,  $BLI$ , sont donc égaux; mais, par construction, l'angle  $BLI = \zeta$ ; donc l'angle  $TNR = \zeta$ . La circonférence  $NMED$  satisfait donc à toutes les conditions du problème.

La position du point  $M$  étant arbitraire, on peut assujettir la circonférence  $ON$  à passer par un point donné de la circonférence  $CG$ .

**65. PROBLÈME** (*fig. 56*). *Décrire une circonférence telle, que les distances de l'un quelconque de ses points, aux extrémités  $A$  et  $B$  d'une droite  $AB$ , soient dans le rapport de deux lignes connues,  $\alpha$ ,  $\zeta$ .*

Cherchez sur  $AB$  un point  $P$  tel, que vous ayez  $PA : PB :: \alpha : \zeta$ .

Le point  $P$  appartiendra à la circonférence demandée.

Prenez deux lignes  $\alpha'$ ,  $\zeta'$ , qui soient entre elles dans le rapport de  $\alpha$  à  $\zeta$ , et telles, que vous ayez  $AB < \alpha' + \zeta'$ ,  $AB > \alpha' - \zeta'$ . Des points  $A$ ,  $B$ , comme centres, avec les rayons  $\alpha'$ ,  $\zeta'$ , décrivez des arcs; ces arcs se couperont nécessairement en un point  $M$ . Tirez les droites  $MA$ ,  $MB$ ,  $MP$ ; par le point  $M$ , menez  $MK$  sous l'angle  $PMK = MPB$ . La droite  $MK$  rencon-

---

(\*) Connaissant le cercle  $CF$ , la sécante  $MS'$  et un point  $M$  de  $MS'$ , on a vu (n° 54) comment on peut mener une sécante  $ON$  telle, que la partie  $NS$  comprise dans le cercle  $CF$  soit égale à la ligne connue  $LH$ , et que  $ON = OM$ .



trera le prolongement BF de AB en un point C, qui sera tel que la circonférence PGH, décrite de C comme centre avec le rayon CP, satisfera au problème.

En effet, par construction,

$$MA = a', MB = b', MA : MB :: a' : b' :: a : b :: PA : PB.$$

Les angles PMA, PMB, sont donc égaux. Mais,

$$PMA + PAM = MPB = PMK = PMB + BMC = PMA + BMC.$$

Les angles PAM, BMC, sont donc égaux; les triangles ACM, MCB, sont donc semblables; on a donc

$$CB : CM :: CM : CA, \text{ ou (1)... } CB : CP :: CP : CA.$$

Cela posé: si d'un point quelconque N, de la circonférence CM, on mène les droites NA, NB, NC, on aura  $CN = CP$ .

La proportion (1) devient.....  $CB : CN :: CN : CA$ .

Les triangles BCN, ACN, ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables et donnent

$$(2)... NA : NB :: CN : CB :: CP : CB.$$

La proportion (1) conduit à

$$CP : CB :: CA - CP : CP - CB :: AP : PB :: a : b.$$

Or, (2) donne  $CP : CB :: NA : NB$ . Donc  $NA : NB :: a : b$ .

La circonférence CM jouit donc de la propriété demandée.

## § V. *Constructions de points qui satisfassent à des conditions données.*

66. PROBLÈME (fig. 57). Trouver un point X tel que la somme des quarrés de ses distances à deux points donnés A, B, soit égale à un quarré donné  $\delta^2$ .

Soit C le milieu de la droite AB; tirez AX, BX et CX; on a vu (n° 1) que

$$\overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 = 2(\overline{CX}^2 + \overline{AC}^2). \text{ Or, } \overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 = \delta^2;$$

$$\text{donc } \overline{CX}^2 + \overline{AC}^2 = \frac{1}{2} \delta^2; \text{ d'où } \overline{CX}^2 = \frac{1}{2} \delta^2 - \overline{AC}^2.$$

Par conséquent, CX est une quantité constante et connue. Tous les points de la circonférence décrite du point C comme centre avec le rayon CX, jouissent donc de la propriété demandée.

Pour construire la valeur du rayon CX, décrivez une demi-circonférence EDF, de C comme centre avec le rayon  $CE = \frac{1}{2} \delta$ ; tirez la perpendiculaire CD à EF, et sur la droite ED comme diamètre, décrivez une autre demi-circonférence DHE; de E comme centre, avec le rayon  $EH = AC$ , décrivez un arc qui coupe cette demi-circonférence en H; la corde DH sera la longueur du rayon CX demandé; car les angles inscrits EDF, EHD, qui s'appuient sur des diamètres, étant droits, on a

$$\delta^2 = \overline{EF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 = 2\overline{DE}^2, \quad \overline{DE}^2 = \frac{1}{2} \delta^2,$$

$$\overline{DH}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{EH}^2 = \frac{1}{2} \delta^2 - \overline{AC}^2 = \overline{CX}^2.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'expression  $\overline{DE}^2 - \overline{EH}^2$  de  $\overline{CX}^2$ , ne soit pas négative; c'est-à-dire que le diamètre DE, de la demi-circonférence DHE, ne soit pas moindre que la corde  $EH = AC$  que l'on doit inscrire dans cette demi-circonférence.

67. PROBLÈME (fig. 58). Une circonférence CP et une sécante SS' étant données, trouver sur SS' un point M tel, que la tangente MT, au cercle CP, soit égale à une ligne connue  $\delta$ .

Sur une tangente quelconque, prenez  $PQ = \delta$ ; tirez CQ, et du point C comme centre, avec le rayon CQ, décrivez une circonférence; elle rencontrera la droite SS' en deux points M, M', qui jouiront de la propriété demandée; car, si l'on mène les tangentes MT, MT', M't, M't', et les droites CP, CT, CT', Ct', Ct', CM, CM', les triangles rectangles CPQ, CTM, CT'M, CtM', Ct'M', seront égaux.

68. PROBLÈME (fig. 59). Connaissant un cercle ACBN, et une corde AB, trouver sur l'arc ACB, un point D tel, que les cordes DA, DB, soient dans le rapport des lignes données  $a, b$ .

Déterminez sur la corde AB un point E tel, que vous ayez

$$EA : EB :: a : b.$$

Prenez le milieu N de l'arc ANB; par les points N, E, tirez la droite NF, qui rencontre l'arc ACB en D. Je dis que le point D satisfera à la question; car la droite DE divisant l'angle ADB en deux parties égales, on a

$$DA : DB :: EA : EB :: a : b.$$

69. PROBLÈME (fig. 59). Étant donné un arc ACB, et sa corde AB, trouver sur cet arc un point D tel, que le rectangle des droites DA, DB, soit égal à un carré donné  $\delta^2$ .

Prenez le milieu C de l'arc ACB; du point C comme centre, décrivez deux circonférences AGF, DKD', dont l'une passe par les points A, B, et dont l'autre soit tangente à une corde  $RS = 2\delta$ . Les points D, D', où la circonférence DKD' coupe l'arc ACB, satisfont au problème; c'est-à-dire qu'en tirant les droites DA, DB, D'A, D'B, on aura

$$DA \times DB = D'A \times D'B = \delta^2.$$

En effet, par le point D, menez la tangente FG au cercle DKD'; vous aurez  $FG = RS = 2\delta$ ,  $DF = DG = \delta$ .

Prolongez AD jusqu'en M; on sait que les cordes AM, FG, se coupent au point D, en parties réciproquement proportionnelles, et les droites DM, DB, étant égales (n° 18), vous aurez

$$DA \times DB = DA \times DM = DF \times DG = \delta^2.$$

On prouverait de même que  $D'A \times D'B = \delta^2$ .

Ce problème n'est pas toujours possible. En effet, pour que les points D, D', existent, il faut que l'on puisse décrire la circonférence DKD', tangente à la corde  $RS = 2\delta$ ; ce qui exige que la corde RS ne soit pas plus grande que le diamètre du cercle CA; le côté  $\delta$  du carré donné, ne doit donc pas être plus grand que la corde CA, qui soutend la moitié de l'arc donné.

Ainsi, selon que le côté  $\delta$  du carré donné sera plus petit que CA, ou égal à CA, ou plus grand que CA, le problème admettra deux solutions, ou une seule solution, ou sera impossible.

70. PROBLÈME (fig. 11). Connaissant les grandeurs et les

*positions de deux droites qui se coupent, construire un point tel, que les trois droites menées de ce point aux extrémités des lignes données forment deux angles connus  $\alpha$ ,  $\zeta$ .*

Supposez que BF et BE soient les lignes données. Les droites menées du point cherché, aux extrémités B, F, de BF; devant former l'angle  $\alpha$ , si l'on décrit sur BF un segment BAF capable de l'angle  $\alpha$ , le point demandé sera situé sur l'arc BAF qui détermine ce segment. Par la même raison, si l'on décrit sur BE un segment BAE capable de l'angle  $\zeta$ , le point cherché sera sur l'arc BAE. Le point demandé sera donc l'intersection A des arcs BAF, BAE, qui déterminent les segments capables des angles donnés  $\alpha$ ,  $\zeta$ . Et en effet, si l'on mène les droites AF, AB, AE, les angles BAF, BAE, seront respectivement égaux aux angles donnés  $\alpha$ ,  $\zeta$ .

71. PROBLÈME (fig. 56). *Sur une droite donnée DE, trouver un point dont les distances à deux points connus A, B, soient proportionnelles à deux lignes connues,  $\alpha$ ,  $\zeta$ .*

Décrivez une circonférence CM telle, que les distances de l'un quelconque de ses points à A et B soient proportionnelles aux lignes  $\alpha$ ,  $\zeta$ , (n° 65). Les points M et N, où cette circonférence coupera la ligne donnée, jouiront de la propriété demandée; car on aura,  $MA : MB :: \alpha : \zeta$ , et  $NA : NB :: \alpha : \zeta$ .

72. PROBLÈME (fig. 60). *Trouver un point tel, que les droites menées de ce point aux sommets des angles d'un triangle donné, soient proportionnelles aux lignes données,  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ .*

Décrivez deux circonférences telles, que les distances de l'un quelconque des points de la première aux extrémités de AB soient comme  $\alpha$  est à  $\zeta$ , et que les distances de l'un quelconque des points de la seconde aux extrémités de AC soient comme  $\alpha$  est à  $\gamma$  (n° 65). Les points M, M', d'intersection de ces deux circonférences, satisferont aux conditions du problème; car, en tirant les droites MA, MB, MC, M'A, M'B, M'C, on aura  $MA : MB :: \alpha : \zeta$ ,  $MA : MC :: \alpha : \gamma$ ; d'où  $MA : MB : MC :: \alpha : \zeta : \gamma$ .

On prouverait de même que  $M'A : M'B : M'C :: \alpha : \zeta : \gamma$ .

Le problème admet donc généralement deux solutions.

73. PROBLÈME (fig. 61). Dans l'intérieur d'un triangle ABC, trouver un point tel, que les perpendiculaires menées de ce point sur les trois côtés du triangle soient proportionnelles aux lignes données  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ .

Par les points A, B, tirez des droites AK, BE, telles, que les perpendiculaires menées d'un point quelconque de AK sur les côtés AB, AC, soient dans le rapport de  $\alpha$  à  $\zeta$ , et que les perpendiculaires menées de l'un quelconque des points de BE sur les côtés BA, BC, soient dans le rapport de  $\alpha$  à  $\gamma$  (n° 48); l'intersection S, des droites AK, BE, sera le point demandé; car il résulte de la construction, que si l'on mène par le point S les droites SF, SH, SD, perpendiculaires sur les côtés AB, AC, BC, on aura

$$SF : SH :: \alpha : \zeta, \text{ et } SF : SD :: \alpha : \gamma.$$

74. PROBLÈME (fig. 61). Dans l'intérieur d'un triangle donné, trouver un point tel, qu'en menant des droites de ce point aux trois sommets du triangle, les surfaces des trois triangles partiels qui en résultent soient proportionnelles aux lignes données  $\alpha'$ ,  $\zeta'$ ,  $\gamma'$ .

1<sup>re</sup> SOLUTION. Les surfaces des triangles étant proportionnelles aux produits des bases par les hauteurs, ces produits doivent être entre eux comme les lignes  $\alpha'$ ,  $\zeta'$ ,  $\gamma'$ ; les hauteurs doivent donc être proportionnelles aux droites connues

$$\frac{\alpha' \times r}{AB}, \frac{\zeta' \times r}{AC}, \frac{\gamma' \times r}{BC}, (*) ; \text{ désignant ces droites par } \alpha, \zeta, \gamma,$$

la question sera réduite à trouver un point S tel, que les perpendiculaires SF, SH, SD, menées de ce point sur les trois côtés du triangle ABC, soient proportionnelles aux lignes connues  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ . On déterminera ce point comme dans la question précédente.

2<sup>e</sup> SOLUTION. Divisez la base BC en parties BQ, CR, QR, pro-

(\*) Les lignes  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , sont les derniers termes des proportions

$$AB : \alpha' :: r : \alpha, \quad AC : \zeta' :: r : \zeta, \quad BC : \gamma' :: r : \gamma.$$

(r désigne la ligne prise pour unité.)

portionnelles aux lignes  $\alpha'$ ,  $\zeta'$ ,  $\gamma'$ ; par les points Q, R, menez des parallèles QS, RS, aux droites BA, CA; le point S, où ces droites se rencontrent, jouira de la propriété demandée.

En effet, tirez les droites AQ, AR; vous aurez

$$\text{surface } ABQ : ACR : ABC :: BQ : CR : BC :: \alpha' : \zeta' : \alpha' + \zeta' + \gamma'.$$

Menant les droites SA, SB, SC, les triangles SAC, RAC, seront équivalens, comme ayant même base AC et même hauteur.

Par la même raison, les triangles SAB, QAB, seront équivalens; ce qui donnera

$$ASB : ASC : ABC :: \alpha' : \zeta' : \alpha' + \zeta' + \gamma';$$

$$\text{d'où } ABC - ASB - ASC : ASC :: \alpha' + \zeta' + \gamma' - \alpha' - \zeta' : \zeta',$$

$$\text{ou } SBC : SAC :: \gamma' : \zeta'. \text{ Mais, } SAB : SAC :: \alpha' : \zeta'.$$

Le point S satisfait donc à toutes les conditions du problème.

On en déduit une solution du problème du n° 73; car il suffit de prendre le point S de manière que les surfaces des triangles SAB, SAC, SBC, soient proportionnelles aux lignes

$$\frac{\alpha \times AB}{r}, \frac{\zeta \times AC}{r}, \frac{\gamma \times BC}{r}.$$

## § VI. Constructions de Triangles.

75. PROBLÈME (fig. 62). Construire un triangle, connaissant deux de ses côtés,  $a$ ,  $b$ , et la longueur  $\delta$  de la droite qui divise en deux parties égales l'angle compris par les côtés,  $a$ ,  $b$ .

Cherchez une ligne  $d$  telle, que vous ayez,

$$(1) \dots a : a + b :: \delta : d.$$

Sur une droite  $AE = d$ , formez un triangle isoscèle  $CAE$  tel, que  $CA = CE = b$ ; prolongez EC d'une quantité  $CB = a$ , et menez BA; le triangle demandé sera ABC. En effet, dans ce triangle,  $CB = a$ ,  $CA = b$ ; il suffit donc de prouver que la droite CD, qui divise l'angle BCA en deux parties égales, est égale à  $\delta$ .

Or, l'angle  $BCA = CEA + CAE = 2CEA$ , l'angle  $BCA = 2BCD$ ;

les angles  $BCD, CEA$ , sont donc égaux;  $CD$  est donc parallèle à  $EA$ ; on a donc

$$BC : BE :: CD : EA; \text{ ou } (2) \dots a : a + b :: CD : d.$$

Les proportions (1) et (2) prouvent que  $CD = d$ .

76. PROBLÈME (*fig. 62*). Construire un triangle, connaissant deux de ses côtés,  $a, b$ , et la longueur,  $d$ , de la droite qui, partant du sommet de l'angle compris par ces côtés, divise le troisième côté en parties proportionnelles à deux lignes données  $a, b$ . Cherchez des lignes  $d, d'$ , telles, que vous ayez

$$(1) \dots b : a :: a : d \text{ et } (2) \dots a : a + d :: d : d'.$$

Avec les lignes  $d, d', b$ , construisez un triangle  $CEA$  tel, que

$$CE = d, \quad EA = d', \quad CA = b.$$

Prolongez  $EC$  d'une quantité  $CB = a$ , et tirez  $AB$ .

Le triangle  $CAB$  résoudra le problème. Pour le démontrer, prenez sur  $AB$  un point  $D$  qui satisfasse à la condition

$$(3) \dots DA : DB :: a : b.$$

La combinaison des proportions (1) et (3) donne,

$$DA : DB :: d : a, \text{ ou } DA : DB :: CE : CB;$$

$CD$  est donc parallèle à  $EA$ . On a donc

$$BC : BE :: CD : EA, \text{ ou } a : a + d :: CD : d'.$$

Cette dernière proportion, combinée avec la proportion (2), donne  $CD = d$ . Mais,  $CB = a$  et  $CA = b$ ; le triangle  $CAB$  satisfait donc à toutes les conditions du problème.

77. PROBLÈME (*fig. 63*). Construire un triangle, connaissant un angle  $\gamma$ , un côté adjacent,  $a$ , et la somme  $S$  des deux autres côtés.

Faites l'angle  $PCQ = \gamma$ ; prenez  $CD = S$  et  $CB = a$ ; tirez  $DB$ , et menez la droite  $BA$  sous l'angle  $ABD = ADB$ .

Le triangle  $ABC$  résoudra le problème, car l'angle  $ACB = \gamma$ ,  $CB = a$ ,  $AB + AC = AD + AC = CD = S$ .

78. PROBLÈME (fig. 63). Construire un triangle, connaissant un angle  $\gamma$ , un côté adjacent,  $a$ , et la différence  $\delta$  des deux autres côtés.

Faites l'angle  $QCP = \gamma$ ; sur le prolongement de PC, prenez  $CR = \delta$ . Prenez  $CB = a$ ; tirez la droite RB, et menez BA sous l'angle  $ABR = ARB$ . Je dis que ABC sera le triangle demandé; car, l'angle  $ACB = \gamma$ ,  $CB = a$ ,  $AB - AC = AR - AC = CR = \delta$ .

79. PROBLÈME (fig. 64). Construire un triangle, connaissant sa base AB, ainsi que la somme  $S^2$  et la différence  $\delta^2$  des quarrés des deux autres côtés.

Prenez le milieu E de AB; du point E comme centre, décrivez une demi-circonférence telle, que la somme des quarrés des distances de l'un quelconque de ses points aux extrémités A, B, de la base, soit égale à  $S^2$  (n° 66); et sur AB élevez une perpendiculaire DP telle, que la différence des quarrés des distances de l'un quelconque de ses points aux extrémités A, B, soit égale à  $\delta^2$  (n° 37). Le point C d'intersection de la demi-circonférence avec la perpendiculaire, sera le sommet du triangle demandé; car en tirant les droites AC, CB, la base du triangle CAB est AB, et d'après la construction, les côtés AC, CB, ont entre eux les relations demandées,

$$\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = S^2, \quad \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = \delta^2.$$

80. PROBLÈME (fig. 65). Construire un triangle, connaissant sa base  $c$ , l'angle  $\gamma$  du sommet, et la hauteur  $h$ .

Sur une droite  $AB = c$ , décrivez un segment AHB capable de l'angle  $\gamma$ ; menez une perpendiculaire MH à AB, et prenez  $MT = h$ ; par le point T conduisez une parallèle  $CC'$  à AB. Les points C, C', où cette parallèle rencontre l'arc AHB, sont les sommets de deux triangles CAB, C'AB, qui satisfont également à la question proposée.

81. PROBLÈME. Construire un triangle, connaissant sa base  $c$ , sa surface  $\delta^2$ , et l'angle  $\gamma$  du sommet.

Désignez la hauteur inconnue par  $h$ , vous aurez

$$ch = 2\delta^2; \text{ d'où } c : 2\delta :: \delta : h.$$



La hauteur du triangle demandé sera donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues,  $c$ ,  $2\delta$ ,  $\delta$ .

Le problème est ainsi ramené au précédent.

82. PROBLÈME (*fig. 66*). Construire un triangle, connaissant sa surface  $\delta^2$ , un angle BAC, et le point M par lequel doit passer le côté ON opposé à l'angle donné BAC.

Menez MT parallèle à AC; formez le parallélogramme APQR équivalent à  $\delta^2$ ; sur MQ comme diamètre, décrivez une demi-circonférence; inscrivez une corde  $MD = MP$ ; tirez DQ; prenez  $RN = DQ$ ; tirez la droite MN qui rencontre AB en O.

Je dis que AON est le triangle demandé; en effet, les triangles QMS, PMO, RNS, étant semblables, on a

$$\text{surface QMS} : \text{PMO} : \text{RNS} :: \overline{QM}^2 : \overline{PM}^2 : \overline{RN}^2; \text{ d'où}$$

$$\text{QMS} - \text{PMO} : \text{RNS} :: \overline{QM}^2 - \overline{PM}^2 : \overline{RN}^2$$

$$\text{Or, } \overline{QM}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{QM}^2 - \overline{MD}^2 = \overline{DQ}^2 = \overline{RN}^2;$$

$$\text{donc } \text{QMS} - \text{PMO} = \text{RNS}, \text{ ou } \text{OPQS} = \text{RNS};$$

$$\text{donc } \text{OPQS} + \text{AOSR} = \text{RNS} + \text{AOSR}, \text{ ou } \text{APQR} = \text{AON}.$$

Mais, surface APQR =  $\delta^2$ . Donc enfin, surface AON =  $\delta^2$ .

Le triangle AON résout donc le problème.

83. PROBLÈME (*fig. 67*). Étant donné un point M dans l'angle BAC, trouver, sur les côtés de cet angle, deux points N et P tels, que le triangle NMP soit semblable à un triangle donné EDF.

Tirez la droite AM; sur DE et DF, décrivez des segmens DSGE, DTGF, capables des angles BAM, CAM; les arcs DSGE, DTGF, se couperont en deux points D, G. Tirez les droites GD, GE, GF. Sur les côtés AB, AC, de l'angle donné BAC, prenez des parties AN, AP, telles, que vous ayez

$$(1) \dots GD : GE :: AM : AN \quad (2) \dots GD : GF :: AM : AP$$

Joignez les points M, N, P, par des droites. Je dis que NMP sera le triangle demandé. En effet, d'après la construction, les triangles NAM, MAP, sont respectivement semblables aux triangles EGD, DGF, car ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels. La similitude de ces triangles donne

l'angle  $\text{AMN} = \text{GDE}$ , l'angle  $\text{AMP} = \text{GDF}$ .

Les angles NMP, EDF, sont donc égaux. Mais,

$\text{MN} : \text{DE} :: \text{MA} : \text{DG}$ , et  $\text{MP} : \text{DF} :: \text{MA} : \text{DG}$ .

Donc,  $\text{MN} : \text{DE} :: \text{MP} : \text{DF}$ .

Les triangles NMP, EDF, ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels; ces triangles sont donc semblables.

Le triangle NMP jouit donc des propriétés demandées.

84. PROBLÈME (fig. 68). Construire un triangle rectangle, connaissant la longueur  $a$  de la perpendiculaire menée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, et la différence  $\delta$  des deux côtés de l'angle droit.

Décrivez une circonférence avec le rayon  $\text{OT} = a$ ; en un point quelconque T de cette circonférence menez une tangente  $\text{Tt}$ , et prenez  $\text{TA} = \delta$ ; par le point A et le centre O, tirez la sécante AB; sur AB comme diamètre décrivez une demi-circonférence  $\text{AcB}$ ; au point B, élevez sur AB une perpendiculaire BE, et prenez  $\text{BK} = a$ ; menez KC parallèle à BA, et CD perpendiculaire à AB; CD sera égal à  $a$ ; tirez les droites AC, BC. Il est facile de voir que CAB sera le triangle demandé; car l'angle ACB est droit, la perpendiculaire CD est égale à  $a$ , et je vais prouver que  $\text{AC} - \text{CB} = \delta$ .

Les propriétés connues des triangles rectangles, donnent

$$\overline{\text{AC}}^2 + \overline{\text{CB}}^2 = \overline{\text{AB}}^2, \text{AC} : \text{AB} :: \text{DC} : \text{CB}, \text{AC} \times \text{CB} = \text{AB} \times \text{DC}.$$

$$\text{Donc } \overline{\text{AC}}^2 + \overline{\text{CB}}^2 - 2\text{AC} \times \text{CB} = \overline{\text{AB}}^2 - 2\text{AB} \times \text{DC} = \overline{\text{AB}}^2 - \text{AB} \times 2\text{DC}.$$

$$\text{Or, } 2\text{DC} = 2a = \text{BP, et } \overline{\text{AC}}^2 + \overline{\text{CB}}^2 - 2\text{AC} \times \text{CB} = (\text{AC} - \text{CB})^2; \text{ donc}$$

$$(\text{AC} - \text{CB})^2 = \overline{\text{AB}}^2 - \text{AB} \times \text{BP} = \text{AB} (\text{AB} - \text{BP}) = \text{AB} \times \text{AP}.$$

Mais,  $AB : AT :: AT : AP$ ; d'où  $AB \times AP = \overline{AT}^2$ ;

donc enfin,  $(AC - CB)^2 = \overline{AT}^2 = d^2$ ; d'où  $AC - CB = d$ .

Si l'on prolonge KC jusqu'en C', on verra que le triangle AC'B satisfait également aux conditions demandées.

**85. PROBLÈME (fig. 69).** Construire un triangle, connaissant son périmètre  $2p$ , et deux de ses angles  $\alpha$ ,  $\zeta$ .

Par les extrémités d'une droite  $DE = 2p$ , menez des droites DC, EC, sous des angles  $CDE = \frac{1}{2}\alpha$ ,  $CED = \frac{1}{2}\zeta$ ; par le point C d'intersection, tirez des droites CA, CB, sous les angles  $DCA = \frac{1}{2}\alpha$ ,  $ECB = \frac{1}{2}\zeta$ . Le triangle ABC résoudra le problème; car il résulte de la construction et des propriétés connues des triangles, que

l'angle  $CAB = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$ , l'angle  $CBA = \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{2}\zeta = \zeta$ ,  
et que  $AC = AD$ ,  $BC = BE$ .

Donc,  $AC + AB + BC = AD + AB + BE = DE = 2p$ .

**86. PROBLÈME (fig. 70).** Construire un triangle ABC, connaissant les longueurs  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , des trois perpendiculaires AD, BE, CF, menées des sommets sur les côtés opposés.

Soient,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ . On aura

surface  $ABC = \frac{1}{2}a\alpha = \frac{1}{2}b\zeta = \frac{1}{2}c\gamma$ ; donc,  $a : b : c :: \zeta : \alpha : \frac{\alpha\zeta}{\gamma}$ .

Par conséquent, si l'on construit un triangle A'B'C' avec les trois lignes connues,  $B'C' = \zeta$ ,  $A'C' = \alpha$ ,  $A'B' = \frac{\alpha\zeta}{\gamma}$ , ce triangle

sera semblable au triangle demandé. Menant donc deux perpendiculaires GH, MN, à la droite  $AD = \alpha$ , et tirant par le point A deux droites AB, AC, sous des angles  $GAB = B'$ ,  $HAC = C'$ , le triangle ABC jouira de la propriété demandée.

**87. PROBLÈME (fig. 70).** Construire un triangle ABC, connaissant les longueurs des perpendiculaires AD, BE, menées des sommets A, B, sur les côtés opposés CB, CA. La droite AD est donnée de position, et l'on connaît le point O de AD par où passe BE.

Les points A, O, D, étant donnés, si la longueur de OB était

connue, on en déduirait facilement la solution du problème proposé; car en menant par le point D une perpendiculaire MN à la ligne donnée AD, l'arc décrit du point O comme centre avec le rayon OB, couperait MN en un point B; tirant la droite BB par les points connus B, O; menant ensuite par le point donné A, la perpendiculaire AC à BR, et tirant AB, le triangle ABC serait construit.

La question est donc réduite à *déterminer la longueur de OB*.

Les triangles rectangles OAE, OBD, sont semblables, et fournissent la proportion  $OA : OB :: OE : OD$ .

Les droites AD, BE, se coupant au point O en parties réciproquement proportionnelles, on peut les considérer comme deux cordes inscrites dans un même cercle; par conséquent, si l'on fait passer par les points donnés A, D, une circonférence quelconque dont le rayon ne soit pas moindre que  $\frac{1}{2} BE$ , et si par le point O on tire dans cette circonférence une corde B'E' dont la longueur soit égale à la ligne connue BE (n° 51), les deux parties OB', OE', de cette corde comprises entre le point O et la circonférence seront les longueurs des lignes inconnues OB, OE; ce qui déterminera la longueur de OB.

**88. PROBLÈME** (fig. 70). *Construire un triangle ABC, connaissant l'angle  $ACB = \gamma$ , et les longueurs des perpendiculaires BE, AD, menées des sommets B, A, sur les côtés opposés CA, CB.*

Tirez deux droites indéfinies CM, CT, qui forment entre elles l'angle donné  $\gamma$ ; par le point C menez deux droites CP, CQ, respectivement perpendiculaires aux droites CM, CT; prenez  $CH = DA$  et  $CK = EB$ ; par les points H, K, menez des parallèles HG, KS, aux côtés CM, CT. Ces parallèles détermineront les points A, B; et le triangle ABC résoudra le problème.

**89. PROBLÈME** (fig. 71). *Construire un triangle rectangle équivalent au trapèze ABCD, et qui ait un des côtés de l'angle droit égal à l'un des côtés parallèles AB, DC, de ce trapèze.*

Tirez la diagonale AC, et par B menez la parallèle FE à CA, qui rencontre en G le prolongement AK de DA; par G menez MN parallèle à DC; élevez CH perpendiculaire à CD, et tirez

la droite DH. Le triangle DCH satisfera aux conditions du problème. En effet, ce triangle est rectangle en C, et les triangles de même base et de même hauteur étant équivalens, si l'on tire la droite CG, on aura

$$BAC + ADC = GAC + ADC, \text{ ou } ABCD = GDC = HDC.$$

Ce problème est toujours possible.

On obtiendrait un second triangle DCH' qui satisferait à la question, en menant par le point D une perpendiculaire DH' à DC, et en tirant la droite CH'.

90. PROBLÈME (fig. 72). *Le sommet M d'un triangle isoscèle est donné; on sait que les extrémités N, L, de la base de ce triangle sont placées sur deux parallèles connues AB, CD, et la base du triangle doit faire un angle donné  $\alpha$  avec ces parallèles. On propose de construire ce triangle.*

Il s'agit d'inscrire, entre les parallèles AB, CD, une droite LN telle, que les droites ML, MN, soient de même longueur, et que l'angle ANL =  $\alpha$ ; le triangle isoscèle MNL résoudra le problème.

Pour construire la droite LN, par un point quelconque F de CD, menez une droite FE sous l'angle CFE =  $\alpha$ ; tirez MG perpendiculaire sur FE, et par le milieu K de IH menez PQ parallèle à EF. Je dis que LN sera la droite demandée.

En effet, les triangles semblables KNI, KLH, donnent

$$KL : KN :: KH : KI.$$

Mais, par construction, KH = KI; donc KL = KN.

La droite MG, perpendiculaire à EF, est perpendiculaire sur la parallèle PQ à EF; MK est donc perpendiculaire sur le milieu K de LN; donc ML = MN. De plus, les angles ANL, LFE, sont égaux à l'angle donné  $\alpha$ . Le triangle MNL jouit donc des propriétés demandées.

91. PROBLÈME (fig. 73). *Construire un triangle, connaissant sa base AB, et l'angle  $\gamma$  du sommet; on sait de plus que les deux autres côtés sont dans le rapport de deux lignes données,  $a, b$ .*

Sur la base AB, décrivez un segment AHB capable de l'angle  $\gamma$ ,

et achevez la circonférence; prenez le milieu E de l'arc AB; sur la corde AB, cherchez un point D tel, que vous ayez  $DA : DB :: a : c$ . Menez les droites EDC, CA, CB; le triangle ABC résoudra le problème. En effet, sa base est AB, l'angle ACB du sommet est égal à l'angle donné  $\gamma$ ; les arcs AE, EB étant égaux, les angles ACE, ECB, sont aussi égaux, et la droite CD divisant l'angle ACB en deux parties égales, on a

$$CA : CB :: DA : DB :: a : c.$$

92. La solution du problème du n° 65 (page 39), conduit très simplement à une autre manière de déterminer le triangle demandé.

En effet, on sait construire une circonférence CG (fig. 56), telle, que les distances de chacun de ses points aux extrémités de la base AB, soient comme  $a$  est à  $c$ , et en décrivant sur AB un segment ADB capable de l'angle donné  $\gamma$ , ce segment coupera la circonférence CG en un point M, qui sera le sommet du triangle AMB demandé.

93. PROBLÈME (fig. 56). *Construire un triangle, connaissant sa base AB; on sait que ses deux autres côtés sont dans le rapport des lignes données  $a, c$ , et que son sommet est sur la droite DE.*

Décrivez une circonférence CG telle, que les distances de chacun de ses points à A et B soient comme  $a$  est à  $c$  (n° 65). Les points M et N, où cette circonférence coupe DE, sont les sommets de deux triangles MAB, NAB, qui jouissent de la propriété demandée; car la base de ces triangles est AB, le rapport des deux autres côtés est celui de  $a$  à  $c$ , et les sommets M, N, sont sur la droite DE.

94. PROBLÈME (fig. 74). *Construire un triangle, connaissant un angle  $C$ , la somme S des côtés qui comprennent cet angle, et la longueur  $d$  de la perpendiculaire menée du sommet de l'angle connu sur le côté opposé.*

Faites l'angle  $PKR = C$ ; divisez cet angle en deux parties égales par la ligne KD; sur une perpendiculaire quelconque Mn à KP, prenez  $MG = d$ ; tirez GB et BE parallèles à KP et à GM. Par le point B de KD, inscrivez dans l'angle PKR une ligne

$AH = S$  (n° 44), et menez  $BC$  de manière que l'angle  $ABC = \epsilon$ ; le triangle  $ABC$  résoudra le problème. En effet, l'angle  $ABC$  est égal à l'angle donné  $\epsilon$ , et la perpendiculaire  $BE$ , menée du sommet de cet angle sur le côté opposé  $AC$ , est égale à  $\delta$ .

Il ne reste donc plus qu'à prouver que  $BA + BC = S$ .

Les triangles  $ABC$ ,  $AKH$ , ayant un angle commun  $A$ , et les angles  $ABC$ ,  $AKH$  étant égaux à  $\epsilon$ , les angles  $ECB$ ,  $KHA$  sont égaux. D'ailleurs, si l'on mène  $BF$  perpendiculaire à  $KH$ , on aura  $BF = BE$ ; les triangles rectangles  $BCE$ ,  $BHF$ , sont donc égaux. Donc,

$$BC = BH, \text{ et } BA + BC = BA + BH = AH = S.$$

95. PROBLÈME (fig. 75). Construire un triangle, connaissant un côté  $a$ , un des angles adjacents  $\gamma$ , et la perpendiculaire  $\delta$  menée du sommet de cet angle sur le côté opposé.

Sur la droite  $BC = a$ , décrivez une demi-circonférence; du point  $C$  comme centre avec le rayon  $\delta$ , décrivez un arc qui coupera la demi-circonférence en  $D$ ; tirez  $BD$  que vous prolongerez indéfiniment; menez  $CA$  sous l'angle  $BCA = \gamma$ . Le triangle demandé sera  $ABC$ ; car  $BC = a$ , l'angle  $BCA = \gamma$ , et la droite  $CD$ , perpendiculaire sur  $AB$ , est égale à  $\delta$ .

Si l'on tire la droite  $CA'$ , sous l'angle  $BCA' = \gamma$ , le triangle  $A'BC$  satisfera également à la question.

96. PROBLÈME (fig. 76). Construire un triangle, connaissant sa surface  $m \times n$ , et deux de ses angles  $\alpha$ ,  $\gamma$ .

Dans l'angle  $BAC = \alpha$ , inscrivez une droite  $DE = 2m$ , qui forme avec  $AB$  l'angle  $ADE = \gamma$  (n° 42). Menez  $AF$  perpendiculaire sur  $DE$ ; cherchez deux moyennes proportionnelles, l'une  $a$ , entre  $m$  et  $n$ , l'autre  $b$ , entre  $AF$  et  $m$ ; prenez  $AM$  quatrième proportionnelle aux trois lignes  $b$ ,  $a$ ,  $AD$ ; il en résultera

$$a^2 = m \times n, \quad b^2 = m \times AF, \quad b : a :: AD : AM.$$

Menez  $MN$  parallèle à  $DE$ . Le triangle  $AMN$  résoudra le problème. En effet,  $b^2 = AF \times m = AF \times \frac{1}{2} DE = \text{surface } ADE$ ,

$$\text{et surf. } ADE : \text{surf. } AMN :: AD : AM :: b^2 : a^2 :: b^2 : m \times n.$$

Or, surface  $ADE = b^2$ ; donc surface  $AMN = m \times n$ .

Mais, l'angle  $AMN = ADE = \gamma$ , et l'angle  $MAN = a$ .

Le triangle  $AMN$  satisfait donc aux conditions du problème.

Pour trouver une seconde solution, prenez  $AM' = AM$ , et menez  $M'N'$  sous l'angle  $AM'N' = \gamma$ ; le triangle  $AM'N'$ , égal à  $AMN$ , jouira des mêmes propriétés.

**97. PROBLÈME (fig. 77).** *Étant données deux circonférences concentriques  $OA'$ ,  $OC'$ , construire un triangle  $A'B'C'$ , qui ait deux sommets  $A'$ ,  $B'$ , sur la grande circonférence, le troisième sommet  $C'$  sur la petite circonférence, et qui soit semblable au triangle donné  $ABC$ .*

Menez la droite  $DE$  tangente à la circonférence  $OA'$ , et par le point de contact  $A'$  menez la droite  $A'F$  sous l'angle  $DA'F = B$ ; décrivez sur  $A'F$  un segment  $FC''C'A'$  capable de  $200^\circ - C$ ; tirez la droite  $FC'B'$  par le point  $F$ , et par le point  $C'$  où l'arc qui détermine ce segment rencontre la circonférence  $OC'$ ; joignez le point  $A'$  aux points  $C'$ ,  $B'$ .

Je dis que le triangle  $A'B'C'$  satisfera aux conditions du problème. En effet, l'angle  $A'B'C' = A'B'F = DA'F = B$ ,

$$\text{l'angle } A'C'F = 200^\circ - C = 200^\circ - A'C'B'.$$

Donc, l'angle  $A'C'B' = C$ .

Le triangle  $A'B'C'$  est donc semblable à  $ABC$ .

Si par le point  $F$  et par le second point d'intersection  $C''$  de l'arc  $FC''C'A'$  avec la circonférence  $OC'$ , on mène la droite  $FC''B''$ , on déterminera un second triangle  $A'B''C''$ , qui satisfera également à la question.

**98. PROBLÈME (fig. 78).** *Construire un triangle, connaissant un angle  $\gamma$ , le rayon  $R$  du cercle circonscrit à ce triangle, et le rayon  $r$  du cercle inscrit.*

Décrivez une circonférence  $ANBG$  avec le rayon  $R$ ; menez la tangente  $DE$  à cette circonférence, et par le point de contact  $A$  menez la corde  $AB$  sous l'angle  $EAB = \gamma$ . Menez une parallèle  $HK$  à  $AB$ , à une distance  $r$  de  $AB$ ; du milieu  $G$  de l'arc  $AB$  comme centre, avec  $GA$  pour rayon, décrivez la circonfé-



rence  $Ao'oBM$ , qui coupe  $HK$  en  $o$  et  $o'$ . Du point  $o$  comme centre et d'un rayon  $r$ , décrivez la circonférence  $tt't''$ ; et des points  $A, B$ , menez à cette circonférence les tangentes  $AtT, Bt'T'$ , qui se couperont en un certain point  $C$ .

Je dis que le triangle  $ABC$  satisfera aux conditions du problème. En effet, par construction, la distance des droites  $AB, HK$ , est égale au rayon  $r$  du cercle  $ot$ ; donc la circonférence  $ot$  est tangente au côté  $AB$ ; et par conséquent, les trois côtés du triangle  $ABC$  sont tangens au cercle  $tt't''$ , dont le rayon est  $r$ .

En second lieu, menez la tangente  $AF$  à la circonférence  $Ao'oB$ , l'angle  $FAG$  sera droit; vous aurez

$$\text{angle } GAB = \frac{1}{2} EAB = \frac{1}{2} \gamma.$$

Mais, l'angle  $AoB = FAB = 100^\circ + GAB = 100^\circ + \frac{1}{2} \gamma$ ; et  $oAB + oBA = 200^\circ - AoB = 200^\circ - (100^\circ + \frac{1}{2} \gamma) = 100^\circ - \frac{1}{2} \gamma$ .

Or, l'angle  $CAo = oAB$ , et l'angle  $CBo = oBA$ ; donc  $CAB + ABC = 2(oAB + oBA) = 200^\circ - \gamma$ ; donc l'angle  $ACB = \gamma$ .

Enfin, puisque l'angle  $BCA$  est égal à l'angle  $BAE$ , il a pour mesure la moitié de l'arc  $AGB$ ; donc son sommet  $C$  est situé sur la circonférence  $AGBN$ , qui a été décrite avec le rayon  $R$ ; donc le rayon du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  est égal à  $R$ .

L'arc  $Ao'oB$  coupe la droite  $HK$  en un second point  $o'$ , qui déterminerait une seconde solution exactement semblable à la première.

99. PROBLÈME (*fig. 78*). Construire un triangle, connaissant un côté  $c$ , le rayon  $R$  du cercle circonscrit, et la distance  $d$  des centres des cercles inscrit et circonscrit.

Prenez une droite  $AB = c$ , et d'un rayon égal à  $R$  décrivez une circonférence  $AGBN$  qui passe par les points  $A, B$ . Du centre  $O$  de cette circonférence, avec un rayon égal à  $d$ , décrivez la circonférence  $o'mon$ , et du milieu  $G$  de l'arc  $AB$  comme centre avec le rayon  $GA$ , décrivez la circonférence  $Ao'oBM$ . Du point  $o$  d'intersection de ces deux circonférences, comme centre, décrivez une circonférence  $tt't''$  tangente à la corde  $AB$ ; et des

points A, B, menez à cette circonférence les tangentes AtT, Bt'T', qui se couperont en C.

Le triangle ABC satisfera à toutes les conditions du problème. En effet, menez au point A la droite DE tangente à la circonférence OA, et la droite AF tangente à la circonférence Ao'oBM; tirez Ao et Bo, vous aurez

$$\text{angle } AoB = FAB = 100^\circ + GAB = 100^\circ + \frac{1}{2} EAB.$$

$$\text{Or, } oAB + oBA = 200^\circ - AoB = 100^\circ - \frac{1}{2} EAB,$$

$$\text{et } CAB + CBA = 2(oAB + oBA) = 200^\circ - EAB.$$

Donc l'angle ACB = EAB; le point C est donc sur la circonférence OA.

De plus, le rayon OA = R, le côté AB = c; et la distance oO, des centres, o, O, des cercles inscrit et circonscrit au triangle ACB, est égale à d. Ce triangle satisfait donc à la question.

La circonférence o'mon coupe l'arc Ao'oB en un second point o' qui détermine une seconde solution exactement semblable à la première.

**100. PROBLÈME (fig. 79).** Construire un triangle rectangle tel, que la somme des deux côtés de l'angle droit soit égale à la ligne donnée S, et que le rapport des quarrés de ces mêmes côtés soit égal à celui des lignes connues,  $\alpha$ ,  $\epsilon$ .

Sur une droite indéfinie MN, prenez des parties DE =  $\alpha$ , EF =  $\epsilon$ , et sur DF comme diamètre décrivez une demi-circonférence; élevez au point E la perpendiculaire EA au diamètre; menez les droites AD, AFK; prenez FH = AD, AG = S; joignez HD; menez GB parallèle à HD, et BC parallèle à DF.

Je dis que le triangle ABC est le triangle demandé. En effet, l'angle DAF est droit; on a

$$(1) \dots AB : AC :: AD : AF, \quad \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: \overline{AD}^2 : \overline{AF}^2,$$

et l'on sait que,

$$\overline{AD}^2 : \overline{AF}^2 :: DE : EF. \quad \text{Donc } \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: DE : EF :: \alpha : \epsilon.$$

$$\text{Mais,} \quad AG : AH :: AB : AD,$$

et l'on déduit de (1) que  $AB + AC : AD + AF :: AB : AD$ ;

donc  $AG : AH :: AB + AC : AD + AF$ ;

or,  $AD + AF = FH + AF = AH$ ; donc,  $AB + AC = AG = S$ .

**101. PROBLÈME (fig. 80).** Construire un triangle, connaissant un côté,  $c$ , et les longueurs  $a, c$ , des droites menées des sommets des angles adjacents aux milieux des côtés opposés.

Sur une ligne indéfinie  $MN$ , prenez trois parties  $DA, AB, BE$  égales à  $c$ ; sur la base  $DE$ , et avec les côtés  $DC = 2a, CE = 2c$ , construisez le triangle  $DCE$ , et joignez le point  $C$  aux points  $A, B$ . Je dis que le triangle  $ACB$  est le triangle demandé. En effet, menez les droites  $BF, AG$ , aux milieux des côtés  $AC, BC$ ; puisque  $AB = AD = BE$ , la droite  $BF$  sera parallèle à  $EC$ , la droite  $AG$  sera parallèle à  $DC$ , et vous aurez

$$BF = \frac{1}{2} EC = c, \quad AG = \frac{1}{2} DC = a.$$

**102. PROBLÈME (fig. 81).** Construire un triangle, connaissant les longueurs  $a, c, \gamma$ , des trois droites menées des sommets des angles aux milieux des côtés opposés.

Avec les côtés,  $DC = 2a, FD = 2c, CF = 2\gamma$ , construisez le triangle  $CDF$ ; achevez le parallélogramme  $DCEF$ ; divisez la diagonale  $DE$  en trois parties égales aux points  $A, B$ , et menez les droites  $CA, CB$ . Je dis que le triangle  $ACB$  est le triangle demandé. En effet, menez les droites  $BG, AH$ , aux milieux des côtés  $AC, CB$ . Puisque  $AB = BE = AD$ , la droite  $AH$  sera parallèle à  $DC$ , la droite  $BG$  sera parallèle à  $EC$ , et vous aurez

$$AH = \frac{1}{2} DC = a, \quad BG = \frac{1}{2} EC = c.$$

Mais le point  $K$ , milieu de la diagonale  $DE$ , l'est aussi de  $AB$ , et  $CK = \frac{1}{2} CF = \gamma$ . Le triangle  $ACB$  satisfait donc à toutes les conditions du problème.

**103. PROBLÈME (fig. 82).** Par trois points donnés  $B, R, Q$ , mener des droites  $MN, PN, PM$ , qui forment un triangle  $MNP$  égal à un triangle donné  $DEF$ .

Tirez les droites  $BQ, BR$ ; sur ces droites décrivez des segments

BMQ, HNR, capables des angles FDE, FED; par le point B menez une sécante MN telle, que  $MN = DE$  (n° 56); tirez les droites MQP, NRP; le triangle MNP satisfera à toutes les conditions du problème; car

$MN = DE$ , l'angle PMN  $=$  FDE, et l'angle PNM  $=$  FED.

Les triangles MNP, DEF, sont donc égaux.

La sécante M'N'  $=$  MN, donnerait une seconde solution.

104. PROBLÈME (fig. 83). Circonscrire au triangle donné BST, le plus grand triangle équilatéral possible.

Sur les côtés BS, BT, décrivez des segmens BDFS, BGET, capables de  $\frac{200^\circ}{3}$ ; achevez les circonférences CB, C'B; par le point B, menez DE perpendiculaire à la corde AB; les droites DS, ET, prolongées se rencontreront en un point H. Le triangle DEH résoudra le problème. En effet, par construction, les angles HDE, HED, étant de  $\frac{200^\circ}{3}$ , l'angle H vaut  $\frac{200^\circ}{3}$ ; le triangle DEH est donc équilatéral.

Il suffit de prouver que la surface de ce triangle est plus grande que celle de tout autre triangle équilatéral circonscrit FGR. Or, tous les triangles équilatéraux étant semblables, on a

$$DEH : FGR :: \overline{DE}^2 : \overline{FG}^2$$

Mais DE est plus grand que FG (n° 14); la surface du triangle DEH est donc plus grande que celle du triangle FGR.

Le triangle DEH jouit donc de la propriété demandée.

105. PROBLÈME (fig. 84). Inscrire dans un cercle donné un triangle isoscèle, connaissant la somme S de la base et de la hauteur de ce triangle.

Par le centre O du cercle donné, tirez une sécante quelconque AQ; prenez AF  $=$  S; d'un point quelconque M de AF, conduisez MH perpendiculaire sur AF; prenez  $MN = \frac{1}{2} FM$ , et par les points F, N, tirez la droite FP, qui rencontre la circonférence donnée en G et G'. Menez les cordes CB, C'B', perpendi-

culaires sur AQ; les points D, D', seront les milieux de ces cordes, et en tirant les droites AB, AC, AB', AC', les triangles ABC, AB'C', satisferont à la question.

En effet, les triangles FMN, FDC, sont semblables, et

$$FM = 2MN; \text{ donc}$$

$$FD = 2DC = BC; \text{ donc } AD + BC = AD + FD = AF = S.$$

On démontrerait de même que  $AD' + B'C' = S$ .

Quand la somme S n'est pas plus grande que le diamètre du cercle donné, le problème n'admet qu'une solution.

Lorsque S est telle qu'en prenant  $AF' = S$ , et  $MN' = \frac{1}{2} MF'$ , la droite F'N'P' est tangente en T au cercle OT, on tire la perpendiculaire TT' à AQ, et on mène les droites AT, AT'; le triangle ATT' est le seul qui satisfasse à la question.

Enfin, quand la somme S est plus grande que AF', le problème est impossible.

Pour calculer le *maximum* AF' de S, au moyen du rayon  $OT = R$ , on observe que les triangles OTF', TLF', étant rectangles et semblables, on a

$$OT : TF' :: TL : LF'; \text{ or, } LF' = 2TL, \text{ donc } TF' = 2OT = 2R.$$

$$\text{Mais, } OF' = \sqrt{OT^2 + TF'^2} = \sqrt{5R^2} = R\sqrt{5},$$

$$\text{et } AF' = R + OF'; \text{ donc } AF' = (1 + \sqrt{5}) \times R.$$

## § VII. Des Lieux géométriques.

106. PROBLÈME (fig. 85). Soit  $XX'X''$  un cercle donné, O son centre, et P un point donné dans le plan du cercle; on tire des droites PX, PX', PX'', etc., du point fixe P aux différens points X, X', X'', etc., de la circonférence OA; sur les prolongemens de ces droites, on prend des parties PY, PY', PY'', etc., telles qu'on ait constamment

$$a : b :: PX : PY :: PX' : PY' :: PX'' : PY'' : \text{etc.}$$

(a et b désignent des lignes données). Il s'agit de trouver le lieu géométrique des points Y, Y', Y'', etc., ainsi déterminés.

Menons le rayon  $OX$ , et par un des points  $Y$  du lieu géométrique, tirons  $YZ$  parallèle à  $OX$ . Les triangles semblables  $POX$ ,  $PZY$ , donnent

$$PO : PZ :: OX : ZY :: PX : PY :: a : b.$$

Donc (1)...  $PZ = \frac{b}{a} \times PO$ , et (2)...  $ZY = \frac{b}{a} \times OX$ .

On aurait de même,  $ZY' = \frac{b}{a} \times OX'$ ,  $ZY'' = \frac{b}{a} \times OX''$ , etc.

La valeur (1) de  $PZ$  est constante, car  $a$ ,  $b$  et  $PO$  sont donnés; elle détermine la position du point fixe  $Z$ .

Or, les distances  $ZY$ ,  $ZY'$ ,  $ZY''$ , etc., sont égales entre elles, car les rayons  $OX$ ,  $OX'$ ,  $OX''$ , etc., sont égaux.

*Le lieu géométrique cherché est donc une circonférence, dont le centre  $Z$  et le rayon  $ZY$  sont déterminés par les équations (1) et (2).*

107. PROBLÈME (fig. 86). On donne de position un point  $P$ , et une droite  $AB$ ; on tire une droite  $PX$ , du point  $P$  à un point quelconque  $X$  de  $AB$ , et l'on mène une droite  $PK$  qui forme avec  $PX$  l'angle donné  $\gamma$ ; on prend sur  $PK$  une partie  $PY$  telle, que  $PX$  soit à  $PY$  dans le rapport de deux lignes données,  $a$ ,  $b$ . Il s'agit de trouver le lieu géométrique de l'extrémité  $Y$  de la droite  $PY$ .

Abaissons  $PC$  perpendiculaire sur  $AB$ ; menons  $PF$  sous l'angle  $CPF = \gamma$ , et prenons  $PD$  de manière qu'on ait,

$$a : b :: PC : PD.$$

Si de l'angle  $CPD$  et de son égal  $XPY$ , on retranche l'angle commun  $XPD$ , on aura l'angle  $CPX = DPY$ .

D'ailleurs,  $PC : PD :: PX : PY$ ;

donc les triangles  $PCX$ ,  $PDY$ , sont semblables; donc l'angle  $D$  est droit.

*Tous les points du lieu géométrique cherché sont donc les différents points de la perpendiculaire  $HG$  élevée à l'extrémité  $D$  de la droite  $PD$  connue de grandeur et de position.*

REMARQUE. La droite  $PD$  pouvant être située de deux côtés de  $PC$ , le problème proposé est susceptible de deux solutions.

108. PROBLÈME (fig. 87). On donne de position un point  $P$  et une droite  $AB$ ; on mène une droite  $PX$ , du point  $P$  à un point quelconque  $X$  de  $AB$ ; et l'on détermine sur  $PX$  un point  $Y$  tel, que le rectangle  $PX \times PY$  soit égal à un carré donné  $a^2$ . On demande le lieu géométrique des points  $Y$ .

Du point  $P$ , abaissez sur  $AB$  la perpendiculaire  $PC$ , et prenez sur  $PC$  un point  $D$  tel que  $PC \times PD = a^2$ ;  $D$  sera un des points du lieu géométrique demandé. Mais on a aussi,

$$PX \times PY = a^2; \text{ donc } PX : PC :: PD : PY;$$

donc les triangles  $PXC$ ,  $PYD$ , sont semblables; donc l'angle  $PYD$  est droit.

Par conséquent, le lieu géométrique cherché est une circonférence dont  $PD$  est le diamètre.

109. PROBLÈME (fig. 87.) On donne un point  $P$  sur une circonférence  $PYD$  connue de grandeur et de position; on mène par le point  $P$  une corde quelconque  $PY$ , que l'on prolonge d'une longueur  $YX$  telle, que  $PX \times PY$  soit égal à un carré donné  $a^2$ . Trouver le lieu géométrique des points  $X$ .

Le problème précédent conduit immédiatement à cette construction : tirez par le centre  $O$  la droite  $PC$ , de manière que  $PD \times PC = a^2$ ; la perpendiculaire  $AB$  à  $PC$ , menée par le point  $C$ , sera le lieu géométrique demandé.

110. PROBLÈME (fig. 88). On donne un point  $P$  et un cercle  $OA$ . On joint le point fixe  $P$  avec un point quelconque  $X$  de la circonférence  $OA$ , et l'on tire une droite  $PM$  qui forme avec  $PX$  un angle constant  $\gamma$ . On prend sur  $PM$  une partie  $PX'$  telle, que les longueurs  $PX$ ,  $PX'$ , soient dans le rapport de deux lignes données,  $a$ ,  $b$ . Il s'agit de trouver le lieu géométrique des points  $X'$  ainsi déterminés.

Menez la droite  $PB$  par le point  $P$  et le centre  $O$ ; tirez  $PN$  sous l'angle  $BPN = \gamma$ ; vous obtiendrez deux points  $A'$ ,  $B'$ , du lieu géométrique demandé, en portant sur  $PN$  des parties  $PA'$ ,  $PB'$ ; telles que vous ayez,

$$a : b :: PA : PA', \quad a : b :: PB : PB'.$$

Ces deux proportions donnent

$$PA : PA' :: PB : PB' :: a : b ; \text{ d'où}$$

$$(1) \dots PB + PA : PB' + PA' :: PB - PA : PB' - PA' :: a : b.$$

$$\text{Or, } PB = PO + OB = PO + OA, PA = PO - OA;$$

$$\text{donc, } PB + PA = 2PO, \text{ et } PB - PA = 2OA.$$

On verra de même, en prenant le milieu  $O'$  de la droite  $A'B'$ ,  
que  $PB' + PA' = 2PO'$ ,  $PB' - PA' = 2O'A'$ .

La proportion (1) devient

$$2PO : 2PO' :: 2OA : 2O'A' :: a : b.$$

$$\text{Donc, } PO : PO' :: a : b. \text{ D'ailleurs } PX : PX' :: a : b;$$

$$\text{donc, } PO : PX :: PO' : PX'.$$

Or, l'angle  $XPX' = OPO' = \gamma$ ; donc l'angle  $OPX = O'PX'$ .

Les triangles  $OPX$ ,  $O'PX'$ , sont donc semblables, comme ayant les angles égaux en  $P$  compris entre deux côtés proportionnels; on a donc

$$OX : O'X' :: PO : PO' :: a : b; \text{ d'où } O'X' = \frac{b}{a} \times OX.$$

Tous les points  $X'$ , du lieu géométrique demandé, sont donc éloignés du point  $O'$  d'une quantité constante. Par conséquent, *le lieu géométrique cherché est une circonférence, décrite du point  $O'$  comme centre avec un rayon égal à  $\frac{b}{a} \times OX$ .*

111. PROBLÈME (fig. 89). On donne de grandeur et de position le cercle  $OX$  et la droite  $AB$ . Par un point quelconque  $X$  de la circonférence, on tire une droite  $XY$  parallèle et égale à  $AB$ . Il s'agit de trouver le lieu géométrique des points  $Y$ .

Du centre  $O$  menez  $OZ$  parallèle et égale à  $AB$ , la figure  $OZYX$  sera un parallélogramme; donc  $ZY = OX$ . Par conséquent, *le lieu géométrique cherché est la circonférence d'un cercle dont  $Z$  est le centre, et dont le rayon est égal à  $OX$ .*

112. PROBLÈME (fig. 90). Deux droites indéfinies  $BB'$ ,  $CC'$ ,



*étant données de position, trouver le lieu géométrique des points X tels qu'en menant des droites XP, XQ, qui forment avec BB' et CC' des angles donnés  $\alpha, \zeta$ , les longueurs XP, XQ, soient dans le rapport constant de deux lignes connues,  $a, b$ .*

Soit  $x$  un second point du lieu géométrique cherché; si l'on tire les parallèles  $xp, xq$ , à XP et XQ, et les droites PQ,  $pq$ , les triangles PXQ,  $pxq$ , seront semblables, comme ayant les angles égaux PXQ,  $pxq$ , compris entre côtés proportionnels; donc les angles QPX,  $qpx$ , sont égaux, et les droites PQ,  $pq$ , sont parallèles; on a donc

$AP : Ap :: PQ : pq :: PX : px$ ; d'où  $AP : PX :: Ap : px$ ; les triangles APX,  $Ap x$ , sont donc semblables, comme ayant un angle  $APX = Ap x$  compris entre côtés proportionnels; les angles XAB,  $xAB$ , sont donc égaux; les trois points A,  $x$ , X, sont donc en ligne droite (*fig. 91*).

Par conséquent, *tous les points du lieu géométrique cherché se trouvent sur une droite qui passe par l'intersection A des droites données.*

Pour construire le lieu géométrique demandé, tirez des droites FF', NN' (*fig. 92*), qui forment avec BB' et CC' les angles donnés  $\alpha, \zeta$ ; à partir des points E, M, où ces droites rencontrent les droites données, prenez des longueurs  $EG = a$ ,  $Mm = b$ ; par les points G,  $m$ , tirez des parallèles GH,  $mK$ , aux lignes BB', CC'; l'intersection  $n$  des droites GH,  $mK$ , sera un des points du lieu géométrique cherché; car en conduisant par  $n$  des parallèles  $ng, nd$ , aux lignes FF', NN', ces parallèles formeront les angles  $\alpha, \zeta$ , avec les droites données BB', CC', et on aura

$$ng = GE = a, nd = mM = b, \quad \text{d'où} \quad ng : nd :: a : b.$$

La droite DAD' menée par les points connus,  $n, A$ , sera donc le lieu géométrique demandé.

La question proposée admet une seconde solution. Car, en prenant  $Mm' = b$ , et en tirant une parallèle  $m'K'$  à CC', qui rencontre GH en  $n'$ , il est facile de voir, par des raisonnemens

analogues aux précédens, que tous les points de la droite RS menée par  $n'$  et A, jouissent de la propriété demandée.

113. PROBLÈME (fig. 93). Deux droites indéfinies  $AA'$ ,  $BB'$ , étant données de position, déterminer le lieu géométrique des points X tels qu'en menant les perpendiculaires  $XP$ ,  $XQ$ , aux droites  $AA'$ ,  $BB'$ , la somme des produits de ces perpendiculaires par les lignes connues,  $a$ ,  $b$ , soit égale à un quarré donné  $\delta^2$ .

Il s'agit de satisfaire à la condition

$$a \times XP + b \times XQ = \delta^2.$$

Pour ramener cette question à la précédente, on prolonge la droite  $QX$ , de X vers E, et l'on porte sur QE une partie QR déterminée par la proportion

$$b : \delta :: \delta : QR ; \text{ de sorte que } \delta^2 = b \times QR.$$

Il ne s'agit plus que de satisfaire à la condition

$$a \times XP + b \times XQ = b \times QR; \text{ d'où}$$

$$a \times XP = b(QR - XQ) = b \times XR.$$

$$\text{Donc } a \times XP = b \times XR; \text{ d'où } XP : XR :: b : a.$$

Par conséquent, si l'on tire par le point connu R, une parallèle CD à  $B'B$ , la question sera réduite à déterminer le lieu géométrique des points X tels qu'en menant les perpendiculaires  $XP$ ,  $XR$ , aux droites indéfinies  $AA'$ ,  $CD$ , les longueurs de ces perpendiculaires soient dans le rapport constant des lignes connues,  $b$ ,  $a$ . On a vu (n° 112) que le lieu géométrique demandé est le système de deux droites qui passent par le point G, et l'on a donné le moyen de construire ces droites.

114. PROBLÈME (fig. 94). Deux points A, B, étant donnés sur une droite indéfinie  $HH'$ , trouver le lieu géométrique des points X tels que la différence  $\overline{XA}^2 - \overline{XB}^2$  soit égale à un quarré donné  $\delta^2$ .

On a vu (n° 37) que le lieu géométrique cherché est une perpendiculaire  $SS'$  à  $HH'$ , et nous avons donné le moyen de construire cette perpendiculaire.

115. PROBLÈME (fig. 95). Deux points A, B, étant donnés,

déterminer le lieu géométrique des points  $X$  tels, que la somme  $\overline{AX}^2 + \overline{BX}^2$  soit égale à un quarré donné  $d^2$ .

On a vu (n° 66) que le lieu géométrique demandé est une circonférence dont le centre est le milieu de la droite  $AB$ , et on a donné le moyen de construire le rayon.

116. PROBLÈME (fig. 96). Deux points  $A, B$ , étant donnés, trouver le lieu géométrique des points  $X$  tels, que les distances  $XA, XB$ , soient constamment dans le rapport des lignes données,  $a, b$ .

Divisez la droite  $AB$  en deux parties telles, que l'on ait

$$CA : CB :: a : b. \text{ Il faudra que } XA : XB :: CA : CB.$$

La ligne  $XC$  divise donc l'angle  $AXB$  en deux parties égales.

Cela posé : soit pris sur le prolongement de  $AB$  un point  $D$ , tel que l'on ait  $DA : DB :: a : b$ ;  
on aura aussi  $XA : XB :: DA : DB$ .

Cette dernière proportion démontre que si l'on tire le prolongement  $XE$  de  $AX$ , la droite  $XD$  divisera l'angle  $BXE$  en deux parties égales. En effet, conduisez la parallèle  $BK$  à  $DX$ , vous aurez

$XA : XK :: DA : DB$ ; d'ailleurs  $XA : XB :: DA : DB$ ;  
donc  $XK = XB$ ; donc l'angle  $XBK = XKB$ .

Mais, les droites  $BK, DX$ , étant parallèles, l'angle  $XBK = BXD$ , l'angle  $XKB = EXD$ ; donc l'angle  $BXD = EXD$ . La droite  $XD$  divise donc l'angle  $BXE$  en deux parties égales. Or,  $XC$  divise l'angle  $BXA$  en deux parties égales, et l'angle  $BXE + BXA = 200^\circ$ ; donc l'angle  $BXC + BXD = 100^\circ$ .

Le point  $X$  appartient donc à la circonférence décrite sur  $CD$  comme diamètre; et par conséquent, le lieu géométrique cherché est une circonférence.

Pour construire le point  $D$ , on observera que la proportion

$$DA : DB :: a : b, \text{ donne } DA - DB : DB :: a - b : b,$$

ce qui revient à  $AB : BD :: a - b : b$ .

On obtiendra donc  $BD$ , en construisant une quatrième proportionnelle géométrique aux trois lignes connues  $a - b, b, AB$ .

---

---

## DEUXIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES POINTS, DES LIGNES ET DES SURFACES, SITUÉS D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE.

---

### § 1<sup>er</sup>. *Des plans. De la perpendiculaire et des obliques à un plan. Problèmes.*

117. DÉFINITION. Le *plan* est une surface indéfinie sur laquelle une droite s'applique exactement dans tous les sens.

*Une droite menée par deux points quelconques d'un plan, est donc tout entière dans ce plan.*

Pour fixer les idées, nous assignerons des formes déterminées aux plans; mais il faudra toujours concevoir que ces portions de plans sont prolongées indéfiniment dans tous les sens.

118. THÉORÈME. *L'intersection d'une droite avec un plan est un point; car si la droite avait deux points communs avec le plan, elle serait tout entière dans le plan, ce qui est contre l'hypothèse.*

119. THÉORÈME (fig. 98). *Par deux droites qui se coupent, on peut toujours mener un plan, et l'on n'en peut mener qu'un seul.*

Tirez deux droites BE, BD, qui se coupent en B, et concevez un plan qui tourne autour de BD; quand ce plan rencontrera un point C de BE, la droite BE sera tout entière dans ce plan (n° 117); et si le plan continuait à tourner, il quitterait nécessairement le point C, de sorte que la droite BE n'y serait plus comprise.

De là, il suit : 1°. que, *par trois points non en ligne droite, on ne peut faire passer qu'un seul plan;*

2°. Que trois points non en ligne droite, ou deux droites qui se coupent, déterminent la position d'un plan ;

3°. Que deux plans coïncident lorsqu'ils ont trois points communs non en ligne droite.

120. THÉORÈME (fig. 99). *Par deux droites parallèles, on ne peut conduire qu'un seul plan ; car si l'on pouvait mener deux plans qui continssent chacun les parallèles AB, CD, en prenant trois points E, F, G, de ces parallèles, les deux plans passeraient par ces trois points non en ligne droite, ce qui est impossible (n° 119, 1°).*

*Un plan assujetti à passer par deux parallèles est donc entièrement déterminé.*

121. THÉORÈME (fig. 100). *Par un point donné, on ne peut conduire qu'une seule parallèle à une droite donnée.*

Si, par le point E, on pouvait mener deux parallèles EB, EQ à la droite CD, les deux plans QECD, BECD, se confondraient, car ils passent par trois points E, C, D, non en ligne droite; on pourrait donc conduire par un même point et dans un même plan, deux parallèles EB, EQ, à CD; ce qui est absurde.

122. THÉORÈME (fig. 101). *Lorsque deux droites sont parallèles, si par une de ces droites et un point de l'autre droite, on mène un plan, cette dernière droite sera tout entière dans le plan.*

En effet, si les droites AB, CD, sont parallèles, elles seront situées dans un même plan. Par la droite CD et un point quelconque E de AB, menez un plan, et tirez une droite EC du point E, à un point quelconque C de CD. Les droites CD, CE, seront dans ce dernier plan; mais elles sont aussi dans le plan des parallèles; donc ces deux plans se confondent (n° 119).

123. THÉORÈME (fig. 102). *Lorsque par un point d'un plan, on mène une parallèle à une droite située dans ce plan; cette parallèle est tout entière dans le plan.*

Par le point E du plan MN, menez une parallèle EB à la droite CD située dans le plan MN. Si EB n'était pas dans le plan MN, on pourrait conduire dans ce plan une parallèle EQ à CD; les

deux droites EQ, EB, seraient donc parallèles à CD ; ce qui n'est pas possible (n° 121).

124. THÉORÈME (fig. 103). *Toutes les parallèles menées par les différens points d'une droite, sont dans un même plan.*

Conduisez un plan CK par les droites RC, RK ; si par un point quelconque M de RK vous menez une parallèle ML à RC, cette parallèle sera dans le plan CK (n° 123). Toutes les parallèles à RC, menées par des points quelconques de RK, sont donc dans le plan CK.

125. THÉORÈME. *L'intersection de deux plans est une ligne droite ; car si l'on pouvait trouver trois points de l'intersection qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans se confondraient (n° 119, 3°) ; ce qui est contre l'hypothèse.*

*Une ligne droite est donc entièrement déterminée, lorsqu'elle doit se trouver à la fois dans deux plans qui se coupent.*

126. THÉORÈME (fig. 104). *L'intersection de trois plans qui ne passent pas par la même droite et qui se coupent deux à deux, est un point ; car l'intersection de deux plans CK, LN, étant une droite AB, un troisième plan EG, qui ne passe pas par AB, coupe la droite AB en un point P, et ce point est l'intersection des trois plans CK, LN, EG.*

*Un point est donc entièrement déterminé, lorsqu'il doit se trouver en même temps sur trois plans donnés qui ne passent pas par la même droite, et qui se coupent deux à deux.*

127. DÉFINITION. *Une droite est dite perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle ne penche d'aucun côté de ce plan ; c'est-à-dire, lorsqu'elle forme des angles droits avec toutes les droites menées par son PIED dans le plan.*

RÉCIPROQUEMENT, *on dit qu'un plan est perpendiculaire à une droite, lorsque cette droite est perpendiculaire à ce plan.*

128. THÉORÈME (fig. 105). *Une droite, perpendiculaire à deux autres qui passent par son pied dans un plan, est perpendiculaire à ce plan.*

Il s'agit de faire voir que si la droite AP est perpendiculaire aux droites PB, PC, menées par son pied P dans le plan GE,

elle sera perpendiculaire à toute autre droite PD menée par le point P dans le même plan. Tirez une droite quelconque MN qui rencontre les trois droites PB, PD, PC, en B, D, C; prolongez AP d'une longueur  $PA' = PA$ ; tirez les droites AB, AD, AC, A'B, A'D, A'C; les triangles rectangles APB, A'PB, sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc  $AB = A'B$ . Par une raison semblable,  $AC = A'C$ . Les triangles ACB, A'CB, sont donc égaux; et par suite, l'angle  $ACD = A'CD$ . Les triangles ACD, A'CD, sont donc égaux, comme ayant le côté commun CD, le côté  $AC = A'C$ , et l'angle  $ACD = A'CD$ . Donc  $AD = A'D$ . On en déduit que les triangles APD, A'PD, sont égaux, comme ayant un côté PD commun, et les deux autres côtés égaux chacun à chacun. Les angles APD, A'PD, sont donc égaux; la droite APA' est donc perpendiculaire à PD.

129. THÉORÈME (fig. 106). *Par un point donné, on ne peut conduire qu'un seul plan perpendiculaire à une droite.*

Si, par le point P, on pouvait mener deux plans PR, PQ, perpendiculaires à la droite AB, cette droite serait perpendiculaire à ces deux plans (n° 127); conduisant un plan par le point P et par la droite AB, les intersections PG, PH, de ce plan avec les plans PR, PQ, seraient perpendiculaires à AB; donc, par un même point P, on pourrait mener dans le plan d'une droite AB, deux perpendiculaires PG, PH, à cette droite; ce qui est impossible.

130. THÉORÈME (fig. 107). *Si, par un point d'une droite, on mène un plan perpendiculaire à cette droite, et des perpendiculaires à cette droite, toutes ces perpendiculaires seront dans ce plan.*

Par le point B de AF, conduisez le plan GE perpendiculaire à AF, et menez des droites BN, BM, BD, etc., perpendiculaires à AF; toutes ces perpendiculaires seront dans le plan GE, car si la perpendiculaire BD à BA, n'était pas dans le plan GE, le plan mené par les droites AB, BD, couperait le plan GE, suivant une droite BI, perpendiculaire à BA (n° 127);

les angles  $\angle ABI$ ,  $\angle ABD$ , situés dans un même plan, seraient donc droits; ce qui est absurde. La droite  $BD$  est donc dans le plan  $GE$ .

**131. THÉORÈME 1°.** *Par un point donné, hors d'un plan ou sur un plan, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à ce plan.*

Si par le point  $A$  (fig. 108), pris hors du plan  $GE$ , on pouvait mener deux perpendiculaires  $AB$ ,  $AI$ , à ce plan, le triangle  $ABI$  aurait deux angles droits  $\angle ABI$ ,  $\angle AIB$ ; ce qui est impossible.

Si par le point  $B$  (fig. 109) du plan  $GE$ , on pouvait élever deux perpendiculaires  $BA$ ,  $BP$ , à ce plan, en menant un plan par ces deux lignes, il couperait le plan  $GE$  suivant une droite  $BI$ , et les angles  $\angle ABI$ ,  $\angle PBI$ , seraient droits (n° 127); ce qui est impossible, puisque les droites  $BA$ ,  $BP$ ,  $BI$ , sont dans un même plan.

**2°.** *La perpendiculaire  $AB$  (fig. 110) menée d'un point quelconque  $A$ , sur un plan  $GE$ , est plus courte qu'une oblique quelconque  $AI$ ; car le triangle  $ABI$ , rectangle en  $B$ , donnant  $\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 - \overline{BI}^2$ , on a  $\overline{AB}^2 < \overline{AI}^2$ , d'où  $AB < AI$ .*

**3°.** *Deux obliques  $AI$ ,  $AD$ , (fig. 110), qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire  $AB$ , sont égales; car les triangles rectangles  $ABI$ ,  $ABD$ , sont égaux, et donnent  $AI = AD$ .*

**4°.** *De deux obliques, celle qui s'approche le plus de la perpendiculaire, est la plus courte.*

Soit  $BI < BC$  (fig. 110); les triangles rectangles  $ABI$ ,  $ABC$ , donnent

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2, \text{ et } \overline{AI}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BI}^2.$$

Or,  $BI$  est plus petit que  $BC$ , donc  $AI$  est moindre que  $AC$ .

**5°.** On prouverait de même que deux obliques égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire, et que si une oblique est plus courte qu'une autre, elle est plus près de la perpendiculaire.

**132. THÉORÈME (fig. 111).** *Lorsqu'une droite fait des angles égaux avec trois droites menées par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.*



Concevez que la droite  $AB$  forme des angles égaux avec les droites  $BC$ ,  $BD$ ,  $BK$ , menées par son pied dans le plan  $GE$ ; prenez  $BI = BM = BN$ ; tirez les droites  $AI$ ,  $AM$ ,  $AN$ ; les triangles  $ABI$ ,  $ABM$ ,  $ABN$ , seront égaux; les obliques  $AI$ ,  $AM$ ,  $AN$ , sont donc égales; elles s'écartent donc également du pied de la perpendiculaire, menée du point  $A$  sur le plan  $GE$ ; le pied de cette perpendiculaire est donc également distant des points  $I, M, N$ ; il est donc le centre  $B$  de la circonférence qui passe par ces trois points;  $AB$  est donc perpendiculaire au plan  $GE$ .

133. THÉORÈME (fig. 112). *Si du pied  $B$  de la perpendiculaire  $AB$  au plan  $GE$ , on mène une perpendiculaire  $BI$  à la droite  $HK$  située dans le plan  $GE$ , la droite  $AI$  sera perpendiculaire sur  $HK$ .*

Prenez  $IC = ID$ , tirez  $BC$ ,  $BD$ ,  $AC$  et  $AD$ ; les obliques  $BC$ ,  $BD$  étant égales, les triangles  $ABC$ ,  $ABD$ , rectangles en  $B$ , sont égaux;  $AC$  est donc égal à  $AD$ ; les triangles  $AIC$ ,  $AID$ , sont donc égaux; les angles  $AIC$ ,  $AID$ , sont donc égaux;  $AI$  est donc perpendiculaire à  $HK$ .

134. THÉORÈME (fig. 113). *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, toute parallèle à cette droite est perpendiculaire au même plan.*

La ligne  $BA$  étant perpendiculaire au plan  $GE$ , si, par un point quelconque  $I$  de ce plan, on mène une parallèle  $IP$  à  $BA$ , et si l'on tire la droite  $BIH$ , l'angle  $PIH$  sera droit, comme égal à l'angle droit  $ABH$ . Dans le plan  $GE$ , tirez la droite  $CID$  perpendiculaire à  $BI$ , et joignez  $AI$ ; l'angle  $AID$  sera droit (n° 133); mais déjà l'angle  $BID$  est droit; donc  $DI$  est perpendiculaire au plan  $ABIP$  des droites  $IA$ ,  $IB$ ; donc l'angle  $DIP$  est droit. Ainsi,  $PI$  est perpendiculaire aux droites  $IH$ ,  $ID$ , menées par son pied dans le plan  $GE$ ; la ligne  $PI$  est donc perpendiculaire au plan  $GE$  (n° 128).

135. THÉORÈME (fig. 114). *Deux perpendiculaires à un même plan, sont parallèles.*

Si les droites  $AB$ ,  $PI$ , perpendiculaires au plan  $GE$ , n'étaient

pas parallèles, par un point quelconque A de AB, on pourrait tirer une parallèle AN à PI; AN serait perpendiculaire au plan GE (n° 134); on pourrait donc mener par un point A, deux perpendiculaires AN, AB, au plan GE; ce qui est absurde (n° 131).

136. THÉORÈME (fig. 115). *Deux droites parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles; car les droites AB, CD, étant parallèles à FH, le plan GE, mené perpendiculairement à FH, sera perpendiculaire aux droites AB, CD, parallèles à FH (n° 134); les droites AB, CD, perpendiculaires au plan GE, sont parallèles entre elles (n° 135).*

137. THÉORÈME. *Les perpendiculaires abaissées, sur un plan, des différens points d'une droite, sont dans un même plan.*

En effet, ces perpendiculaires sont parallèles entre elles (n° 135); or, les parallèles menées par les différens points d'une droite, sont situées dans un même plan (n° 124); le principe est donc démontré.

138. PROBLÈME (fig. 116). *Par un point B, pris sur la droite AB, mener un plan perpendiculaire à cette droite.*

Suivant AB, conduisez deux plans ABC, ABD; dans ces plans, tirez des perpendiculaires BC, BD, sur AB; le plan GE, mené par les droites BC, BD, sera perpendiculaire à AB (n° 128).

139. PROBLÈME (fig. 117). *Par un point C, pris hors d'une droite AB, mener un plan perpendiculaire à cette droite.*

Du point C, menez une perpendiculaire CF à BA; par le point B, tirez BD perpendiculaire sur AB; le plan GE, conduit suivant les droites CF, BD, sera perpendiculaire à BA et passera par le point C.

140. PROBLÈME (fig. 118). *Par un point A, pris hors d'un plan GE, mener une perpendiculaire à ce plan.*

Dans le plan GE, prenez trois points I, M, N, également distans du point A; si AB est la perpendiculaire demandée, les obliques égales AI, AM, AN, seront également éloignées du

*rens points de la droite sur le plan, sont perpendiculaires à cette droite.*

Menez RC perpendiculaire au plan GE; conduisez un plan RD, par les droites RK, RC; ce plan coupera le plan GE suivant une droite CD parallèle à RK (n° 144); mais l'angle RCD est droit; l'angle CRK est donc droit; CR est donc perpendiculaire à RK.

149. THÉORÈME (fig. 124). *Lorsqu'une droite RK est parallèle à un plan GE, toutes les perpendiculaires menées des différens points de cette droite sur le plan, sont égales entre elles.*

Tirez des perpendiculaires RC, ML, KD, au plan GE; ces perpendiculaires seront parallèles (n° 135), et situées dans un même plan CDKR (n° 137); ce plan coupera le plan GE, suivant une droite CD parallèle à RK (n° 144); les parallèles RC, ML, KD, comprises entre les parallèles RK, CD, seront égales entre elles, ce qui démontre le principe énoncé.

Les parallèles RC, ML, KD, sont perpendiculaires à la droite RK (n° 148), et au plan GE.

150. PROBLÈME. *Une droite étant parallèle à un plan, on demande la plus courte distance de la droite au plan.*

Les perpendiculaires menées des différens points de la droite sur le plan étant plus courtes que les obliques menées de ces points sur le plan, et ces perpendiculaires étant égales (n° 149), chacune d'elles mesure la plus courte distance demandée. Cette plus courte distance est perpendiculaire au plan et à la droite.

*Tous les points d'une parallèle à un plan sont donc également éloignés du plan.*

151. THÉORÈME (fig. 124). *Lorsque deux points R, K, d'une droite, sont à égale distance d'un plan, cette droite est parallèle au plan; car les perpendiculaires RC, KD, au plan GE, étant égales et parallèles (n° 135), RK est parallèle à CD; et par conséquent, RK est parallèle au plan GE (n° 143). Ce qui démontre le principe énoncé.*

152. THÉORÈME (fig. 125). *Deux plans MN, PQ, perpendiculaires à une même droite AC, sont parallèles.*

Si ces plans n'étaient pas parallèles, ils se couperaient. Soit  $O$  l'un des points de l'intersection; joignons ce point avec les points  $A, C$ , où la ligne  $AC$  rencontre les plans  $MN, PQ$ ; la droite  $AC$  serait perpendiculaire aux lignes  $OA, OC$ , menées par son pied dans ces plans (n° 127); on pourrait donc tirer deux perpendiculaires d'un même point  $O$  sur une droite  $AC$ , ce qui est absurde; les plans  $MN, PQ$ , ne peuvent donc pas se rencontrer; ils sont donc parallèles.

**153. THÉORÈME** (fig. 126). *Les intersections de deux plans parallèles, par un même plan, sont parallèles.*

Si les intersections  $AB, CD$ , des plans parallèles  $MN, PQ$ , par le plan  $ABDC$ , n'étaient pas parallèles, comme elles sont dans ce dernier plan, elles se rencontreraient; les plans parallèles  $MN, PQ$ , se rencontreraient donc; ce qui est absurde.

**154. THÉORÈME** (fig. 127). *Par un point donné, on ne peut conduire qu'un seul plan parallèle à un plan donné.*

Supposons qu'on puisse mener par le point  $A$ , deux plans  $AR, AQ$ , parallèles au plan  $GE$ ; si l'on conduit par le point  $A$  un plan quelconque  $ABKG$ , les intersections  $AB, AH$ , de ce plan avec les plans  $AQ, AR$ , seraient parallèles à  $GK$  (n° 153); on pourrait donc tirer par le point  $A$ , deux parallèles à  $GK$ ; ce qui est absurde (n° 121).

**155. THÉORÈME** (fig. 128). *Lorsque deux plans sont parallèles, la perpendiculaire à l'un de ces plans est perpendiculaire à l'autre.*

Concevez deux plans parallèles  $MN, PQ$ ; menez la droite  $AC$  perpendiculaire au premier plan; je dis qu'elle sera perpendiculaire au second; car en conduisant un plan quelconque  $ABDC$  par  $AC$ , les intersections de ce plan avec les plans parallèles  $MN, PQ$ , seront deux parallèles  $AB, CD$ ; la perpendiculaire  $AC$  au plan  $MN$ , est perpendiculaire à la droite  $AB$  menée par son pied dans ce plan; mais  $CD$  est parallèle à  $AB$ ; la ligne  $AC$  est donc perpendiculaire à une droite quelconque  $CD$ , menée par son pied dans le plan  $PQ$ ;  $AC$  est donc perpendiculaire au plan  $PQ$ .

**156. THÉORÈME** (fig. 129). *Deux plans parallèles à un troisième, sont parallèles entre eux.*

Concevez deux plans  $L$ ,  $M$ , parallèles au plan  $N$ , et menez une perpendiculaire  $CD$  à ce dernier plan;  $CD$  sera perpendiculaire aux plans  $L$  et  $M$  (n° 155); les plans  $L$ ,  $M$ , seront donc parallèles comme perpendiculaires à une même droite  $CD$  (n° 152).

157. THÉORÈME (fig. 130). *Les parallèles comprises entre plans parallèles, sont égales.*

Soient les parallèles  $AB$ ,  $CD$ , comprises entre les plans parallèles  $MN$ ,  $PQ$ ; menez le plan  $BC$  suivant ces parallèles; les intersections  $AC$ ,  $BD$ , du plan  $BC$  avec les plans parallèles  $MN$ ,  $PQ$ , seront parallèles; mais  $AB$  et  $CD$  sont parallèles;  $ABDC$  est donc un parallélogramme;  $AB$  est donc égal à  $CD$ ; ce qui démontre le principe énoncé.

158. THÉORÈME (fig. 131). *Lorsque deux droites qui se coupent, sont parallèles à deux autres droites qui se coupent, les angles formés par les deux premières droites, sont respectivement égaux aux angles formés par les deux autres droites.*

Par deux points quelconques  $A$ ,  $A'$ , menez des droites  $BD$ ,  $CE$ ,  $B'D'$ ,  $C'E'$ , parallèles deux à deux. Prenez  $AB = A'B'$  et  $AC = A'C'$ ; tirez les droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $BC$ ,  $B'C'$ . Les lignes  $AB$ ,  $A'B'$ , étant égales et parallèles,  $BB'$  est égal et parallèle à  $AA'$ ; de même,  $AC$  étant égal et parallèle à  $A'C'$ , les droites  $CC'$ ,  $AA'$ , sont égales et parallèles;  $BB'$  est donc égal et parallèle à  $CC'$  (n° 136);  $BC$  est donc égal à  $B'C'$ ; les triangles  $ABC$ ,  $A'B'C'$ , sont donc égaux; les angles  $BAC$ ,  $B'A'C'$ , sont donc égaux; ce qui démontre le principe énoncé.

159. THÉORÈME (fig. 132). *Lorsque deux droites qui se coupent, sont respectivement parallèles à deux autres droites qui se coupent, le plan des deux premières droites est parallèle au plan des deux autres.*

Par deux points quelconques  $A'$ ,  $A$ , menez des droites  $A'B'$ ,  $A'C'$ , respectivement égales et parallèles aux deux droites  $AB$ ,  $AC$ ; les trois droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , seront égales et parallèles. Si les plans  $BAC$ ,  $B'A'C'$ , n'étaient pas parallèles, on pourrait mener par le point  $A$ , un plan  $bAc$  parallèle au plan  $B'A'C'$ ; le plan  $bAc$  couperait  $BB'$  et  $CC'$ , en  $b$  et  $c$ , et l'on aurait (n° 157),

$AA' = bB' = cC'$ ; mais,  $AA' = BB' = CC'$ ; donc,  $BB' = bB'$ ,  $CC' = cC'$ ; ce qui est absurde; les plans  $ABC$ ,  $A'B'C'$ , sont donc effectivement parallèles.

160. THÉORÈME (fig. 133). *Lorsque deux droites qui se coupent, sont parallèles à un plan donné, le plan conduit par ces droites est parallèle au plan donné.*

En effet, si les lignes  $AB$ ,  $AC$ , sont parallèles au plan  $MN$ , la perpendiculaire  $AP$  au plan  $MN$ , sera perpendiculaire aux droites  $AB$ ,  $AC$ , (n° 148); les plans  $MN$ ,  $BAC$ , sont donc perpendiculaires à la droite  $AP$ ; ces plans sont donc parallèles (n° 152).

161. PROBLÈME. *Déterminer la plus courte distance entre deux plans parallèles.*

La plus courte distance d'un point à un plan étant la perpendiculaire menée du point sur le plan, la plus courte distance demandée est nécessairement l'une des perpendiculaires menées de l'un des plans sur l'autre plan. Mais, toute perpendiculaire à l'un des plans est perpendiculaire à l'autre plan (n° 155); la plus courte distance demandée sera donc une perpendiculaire commune aux deux plans; or, ces perpendiculaires sont parallèles (n° 135), et égales (n° 157); chacune d'elles mesure donc la plus courte distance demandée.

Ainsi, *deux plans parallèles sont partout à égale distance, et leur plus courte distance est une droite perpendiculaire à chacun d'eux.*

162. THÉORÈME (fig. 134). *Étant données trois droites  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ , égales et parallèles, si l'on joint leurs extrémités par des droites, les triangles  $ACE$ ,  $BD F$ , qui en résulteront, seront égaux, et les plans de ces triangles seront parallèles.*

Les droites  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ , étant égales et parallèles, les quadrilatères  $BC$ ,  $BE$ ,  $DE$ , sont des parallélogrammes. Par conséquent,  $AC$  est égal et parallèle à  $BD$ , et  $AE$  est égal et parallèle à  $BF$ ; les angles  $CAE$ ,  $DBF$ , sont donc égaux (n° 158); les triangles  $CAE$ ,  $DBF$ , sont donc égaux, et les plans de ces triangles sont parallèles (n° 159).

163. THÉORÈME (fig. 135). Lorsque par plusieurs points  $B, D, F, H$ , d'un plan  $MN$ , on mène des droites  $BA, DC, FE, HG$ , égales et parallèles, les extrémités  $A, C, E, G$ , de ces droites, sont dans un même plan parallèle au plan  $MN$ ; car si cela n'était pas, en conduisant par le point  $A$  un plan  $PQ$ , parallèle au plan  $MN$ , il couperait les droites données en des points,  $c, e, g$ , tels que l'on aurait (n° 157),

$$BA = Dc = Fe = Hg. \text{ Or, } BA = DC = FE = HG;$$

il faudrait donc que l'on eût,  $DC = Dc, FE = Fe, HG = Hg$ ; ce qui ne peut avoir lieu que lorsque les points  $C, E, G$ , sont dans le plan  $PQ$ , parallèle au plan  $MN$ .

164. THÉORÈME (fig. 136). Si par quatre points quelconques  $B, D, F, K$ , de deux parallèles  $GH, ST$ , on mène quatre droites parallèles  $BM, DN, FP, KR$ ; et si après avoir pris  $BA = DC$ , on conduit par les points  $A, C$ , un plan quelconque qui coupe  $FP$  et  $KR$ , en des points  $E, I$ , les droites  $FE, KI$ , seront égales.

Les lignes  $AB, BD$ , étant respectivement parallèles aux droites  $IK, KF$ , le plan  $ABDC$  des deux premières droites est parallèle au plan  $IKFE$  des deux autres (n° 159); les intersections  $AC, IE$ , de ces plans parallèles avec le plan  $IACE$ , sont donc parallèles; les lignes  $BA, DC$ , étant égales et parallèles,  $AC$  est parallèle à  $BD$ ; les droites  $KF, AC$ , parallèles à  $BD$ , sont parallèles entre elles; les lignes  $IE, KF$ , sont donc parallèles entre elles, comme parallèles à  $AC$ ; mais  $IK$  est parallèle à  $EF$ ;  $EFKI$  est donc un parallélogramme; les droites  $FE, KI$ , sont donc égales.

165. THÉORÈME (fig. 136). Lorsque par quatre points quelconques  $B, D, F, K$ , de deux parallèles  $GH, ST$ , on mène quatre droites parallèles  $BM, DN, FP, KR$ , sur lesquelles on prend  $BA = DC, FE = KI$ , les points  $A, C, E, I$ , sont dans un même plan; car s'ils n'y étaient pas, le plan mené par les points  $A, C, E$ , couperait  $IK$  en un point  $i$  tel, que l'on aurait  $FE = Ki$  (n° 164); mais par hypothèse  $FE = KI$ ; les droites  $KI, Ki$ , seraient donc égales; ce qui est absurde.

166. PROBLÈME (fig. 137). Trouver la plus courte distance

*entre deux droites  $AB$ ,  $CD$ , situées d'une manière quelconque dans l'espace.*

Le plus court chemin d'un point à un autre étant la droite qui joint ces points, et la ligne la plus courte qu'on puisse tirer d'un point à une droite étant la perpendiculaire menée de ce point sur la droite, il est facile d'en conclure que *la plus courte distance entre deux droites  $AB$ ,  $CD$ , non situées dans un même plan, est une perpendiculaire commune à ces deux droites.*

Pour construire cette perpendiculaire, par un point quelconque  $C$  de  $CD$ , tirez une parallèle  $CF$  à  $AB$ ; conduisez un plan  $MN$  par les droites  $CD$ ,  $CF$ , ce plan sera parallèle à  $AB$  (n° 143); par un point quelconque  $H$  de  $AB$ , menez  $HK$  perpendiculaire au plan  $MN$ ; par le pied  $K$  de cette perpendiculaire, menez  $KS$  parallèle à  $FC$ ; prenez  $HP = KS$ ; la droite  $PS$  sera la perpendiculaire demandée; car les lignes  $KS$ ,  $AB$ , étant parallèles à  $FC$ , sont parallèles entre elles (n° 136); et la perpendiculaire  $HK$  à  $KS$  est perpendiculaire sur  $AB$ ; mais  $HP$  est égal et parallèle à  $KS$ ;  $PHKS$  est donc un rectangle;  $PS$  est donc perpendiculaire à la droite  $AB$ , et au plan  $MN$  (n° 134); la ligne  $PS$ , perpendiculaire au plan  $MN$ , est aussi perpendiculaire à la droite  $CD$ , qui passe par son pied dans ce plan; la droite  $PS$  est donc à la fois perpendiculaire aux deux lignes  $AB$ ,  $CD$ .

Cela posé: je dis que la droite  $PS$  est plus courte qu'une droite quelconque  $HD$ , terminée aux droites  $AB$ ,  $CD$ . En effet, si par le point  $H$  on tire une perpendiculaire au plan  $MN$ , le pied de cette perpendiculaire ne pourra pas tomber en un point  $E$  de  $CD$ , car  $HE$  serait parallèle à  $PS$  (n° 135), et les droites  $AB$ ,  $CD$ , seraient dans un même plan  $PHES$ ; ce qui est contre l'hypothèse. Soit donc  $HK$  une perpendiculaire au plan  $MN$ ; elle est plus courte que l'oblique  $HD$ ; mais  $HK = PS$ , car  $AB$  est parallèle au plan  $MN$ ; la droite  $PS$  est donc plus courte que  $HD$ ; cette droite est donc la plus courte distance demandée.

### § III. Angles formés par des droites et des plans.

167. Deux droites, situées d'une manière quelconque dans  
Géométrie.



l'espace, peuvent ne pas se couper, quoiqu'elles ne soient pas parallèles. Pour prendre une idée de l'*inclinaison* de ces lignes, on mène par un point quelconque deux parallèles à ces lignes, et l'on est convenu de prendre l'angle formé par ces nouvelles lignes, pour la mesure de l'*inclinaison* des droites données.

D'après cette convention, *pour évaluer l'angle que deux droites font entre elles, on mène des parallèles à ces droites, par un même point; l'angle formé par ces nouvelles lignes, mesure l'inclinaison des droites données.*

**REMARQUE.** Si les droites données étaient parallèles entre elles, en menant par un point quelconque deux parallèles aux lignes données, ces parallèles se confondraient; l'*inclinaison* des lignes données serait donc nulle. Il résulte donc de la convention établie pour la mesure des angles, que *l'angle formé par deux parallèles est nul.*

Il en résulte aussi qu'une droite perpendiculaire à un plan, fait un angle droit avec toutes les droites situées dans ce plan.

En effet (*fig. 139*), soit la droite BG, perpendiculaire au plan MN; tirez dans ce plan une droite quelconque FE, et par le point F, menez FC parallèle à GB; l'angle CFE sera droit (n° 134); mais cet angle mesure l'*inclinaison* des droites BG, FE; donc ces lignes font entre elles un angle droit.

**168. THÉORÈME** (*fig. 140*). Si d'un point quelconque M, d'une oblique BM au plan GE, on mène une perpendiculaire MD sur ce plan, et si l'on tire la droite BD par le pied de l'oblique et le pied de la perpendiculaire, l'angle MBD, sera le plus petit de tous les angles formés par l'oblique BM avec les droites menées par son pied dans le plan GE.

Conduisez une droite quelconque BK dans le plan GE; prenez  $BC = BD$ , et tirez MC. La perpendiculaire MD au plan GE sera plus courte que l'oblique MC; mais les côtés MB, BD, du triangle MBD, sont respectivement égaux aux côtés MB, BC, du triangle

MBC, et MD est plus petit que MC; l'angle MBD est donc plus petit que l'angle MBC.

**REMARQUE.** L'angle MBD est celui qu'on prend pour la mesure de l'inclinaison de l'oblique BM sur le plan GE; et le triangle rectangle MBD montre que l'angle formé par une droite avec un plan est le complément de l'angle formé par cette droite avec la perpendiculaire menée de l'un de ses points sur le plan.

**169. THÉORÈME (fig. 141).** *Les angles formés par une droite quelconque GC, avec des plans parallèles DN, PQ, sont égaux.*

En effet, menez d'un point quelconque G de MG une perpendiculaire GB au plan DN, elle sera perpendiculaire au plan PQ (n° 155); conduisez un plan CGB par les droites GC, GB, il coupera les plans parallèles DN, PQ, suivant deux droites AH, MK, qui seront parallèles (n° 153); donc les angles GAH, GMK, que la ligne GC forme avec les plans parallèles DN, PQ, seront égaux.

**170. THÉORÈME (fig. 142).** *Quand plusieurs droites menées par un point donné font des angles égaux avec un plan, elles rencontrent ce plan en des points situés sur la circonférence qui a pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée du point donné sur le plan.*

Du point donné A, tirez des obliques AI, AM, AN, etc., qui forment des angles égaux avec le plan GE, et qui rencontrent ce plan en I, M, N, etc.; menez AB perpendiculaire au plan GE; par le pied B de cette perpendiculaire, et les points I, M, N, etc., tirez les droites BI, BM, BN, etc.; les angles AIB, AMB, ANB, etc., que forment les obliques avec le plan GE, sont supposés égaux; les triangles rectangles ABI, ABM, ABN, etc., sont donc égaux; les droites BI, BM, BN, etc., sont donc égales. Les points I, M, N, etc., sont donc situés sur la circonférence décrite du point B comme centre, avec le rayon BI.

**171. THÉORÈME (fig. 142).** *Lorsque plusieurs droites égales*

$AI$ ,  $AM$ ,  $AN$ , etc., font des angles égaux avec une droite  $AD$ , les extrémités  $I$ ,  $M$ ,  $N$ , etc., de ces droites, sont situées sur une circonférence dont le plan  $GE$  est perpendiculaire à  $AD$ . Le point de rencontre de  $AD$  avec le plan  $GE$  est le centre  $B$  de la circonférence.

Par le point  $I$ , menez un plan  $GE$  perpendiculaire à  $AD$ ; ce plan rencontrera  $AD$  en un point  $B$ . Tirez les droites  $BI$ ,  $BM$ ,  $BN$ , etc.; les triangles  $ABI$ ,  $ABM$ ,  $ABN$ , etc., seront égaux comme ayant un angle aigu égal, compris entre côtés égaux; les angles  $ABI$ ,  $ABM$ , etc., seront donc égaux; mais l'angle  $ABI$  est droit; les lignes  $BI$ ,  $BM$ ,  $BN$ , etc., sont donc perpendiculaires à  $AD$ ; toutes ces lignes sont donc dans le plan  $GE$  perpendiculaire à  $AD$  (n° 130). Mais, les droites  $BI$ ,  $BM$ ,  $BN$ , etc., sont égales; le principe est donc démontré.  $\curvearrowright$

172. Pour concevoir l'angle formé par deux plans  $ABCD$ ,  $ABEF$  (fig. 143), qui se coupent suivant la droite  $AB$ , supposons que ces plans étant d'abord appliqués l'un sur l'autre, on laisse fixe le plan  $AC$ , et que l'autre plan tourne autour de la droite  $AB$ ; la quantité dont le second plan s'écarte du premier est ce qu'on nomme l'angle dièdre formé par les deux plans.

173. On fait dépendre la mesure de cet angle dièdre, de l'angle rectiligne formé par deux droites  $AD$ ,  $AF$ , (fig. 145), menées dans les deux plans par un point quelconque  $A$  de l'intersection. Or, pour que l'angle rectiligne  $DAF$  puisse servir de mesure à l'angle des plans, il faut et il suffit que ces deux angles soient nuls en même temps, et qu'ils varient dans le même rapport.

La première condition exige que les droites  $AD$ ,  $AF$ , forment des angles égaux avec l'intersection  $AB$ ; car autrement l'angle  $DAF$  de ces droites ne deviendrait pas nul, quand le plan mobile  $AE$  coïnciderait avec le plan fixe  $AC$ . Nous supposerons donc que les angles  $BAD$ ,  $BAF$ , sont égaux.

La seconde condition ne saurait avoir lieu, si les angles  $BAD$ ,  $BAF$ , ne sont pas droits. En effet, si le plan  $AE$ , d'abord couché sur le plan  $AC$ , fait une demi-révolution autour de  $AB$ , de ma-

nière à venir s'appliquer sur le prolongement  $AG$  du plan  $AC$ , les deux plans, prolongés indéfiniment, coïncideront dans toute leur étendue; la droite  $AF$  prendra la position  $AK$ , et il faudra que  $AK$  soit le prolongement de  $AD$ , car autrement l'inclinaison de deux plans qui coïncident serait mesurée par un angle rectiligne  $KAD$ , qui serait aigu ou obtus; ce qui ne peut avoir lieu. Mais, les angles  $BAK$ ,  $BAD$ , sont égaux, ces angles sont donc droits.

Par conséquent, pour que l'angle dièdre de deux plans qui se coupent, puisse être mesuré par l'angle rectiligne de deux droites menées dans ces deux plans par un même point de l'intersection des plans, il faut que ces deux droites soient perpendiculaires à l'intersection des plans.

174. THÉORÈME. Un angle dièdre a pour mesure l'angle formé par les perpendiculaires menées dans les deux plans, à un même point de l'intersection.

1°. L'angle des perpendiculaires est le même, en quelque point de l'intersection qu'on les élève; car en menant dans les plans  $AC$ ,  $AE$ , (*fig. 143*), des perpendiculaires  $AD$ ,  $BC$ ,  $AF$ ,  $BE$ , sur l'intersection  $AB$  de ces deux plans,  $BC$  sera parallèle à  $AD$ , et  $BE$  sera parallèle à  $AF$ ; les angles  $CBE$ ,  $DAF$ , sont donc égaux (n° 158).

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que l'angle rectiligne des deux perpendiculaires, varie dans le même rapport que l'angle des plans.

2°. (*fig. 143 et 144*). Lorsque l'angle dièdre  $DABF$ , formé par les plans  $AC$ ,  $AE$ , est égal à l'angle dièdre  $D'A'B'F'$ , formé par les plans  $A'C'$ ,  $A'E'$ , si l'on mène dans ces plans des perpendiculaires  $AD$ ,  $AF$ ,  $A'D'$ ,  $A'F'$ , aux intersections  $AB$ ,  $A'B'$ , les angles rectilignes  $DAF$ ,  $D'A'F'$ , seront égaux; car les angles dièdres étant égaux, si l'on applique le plan  $A'C'$  sur le plan  $AC$ , de manière que les côtés  $A'B'$ ,  $A'D'$ , de l'angle droit  $B'A'D'$ , tombent sur les côtés  $AB$ ,  $AD$ , de l'angle droit  $BAD$ , le plan  $A'E'$  prendra la direction du plan  $AE$ , et  $A'B'$  tombant sur  $AB$ , la perpendiculaire  $A'F'$  à  $A'B'$  tombera sur la perpendiculaire  $AF$  à  $AB$ ; les deux côtés

$A'D'$ ,  $A'F'$ , de l'angle  $D'A'F'$ , tombant sur les deux côtés  $AD$ ,  $AF$ , de l'angle  $DAF$ , ces deux angles sont égaux.

*Réciproquement*, lorsque les angles rectilignes  $DAF$ ,  $D'A'F'$ , sont égaux, les angles dièdres  $DABF$ ,  $D'A'B'F'$ , sont égaux; car en appliquant l'angle rectiligne  $D'A'F'$  sur son égal  $DAF$ , de manière que  $A'$  tombe en  $A$ , et que les côtés  $A'D'$ ,  $A'F'$ , tombent respectivement sur  $AD$  et  $AF$ , la perpendiculaire  $A'B'$  au plan de l'angle  $D'A'F'$  coïncidera nécessairement avec la perpendiculaire  $AB$  au plan de l'angle  $DAF$ ; les deux plans qui forment l'angle dièdre  $D'A'B'F'$ , coïncident donc avec les deux plans qui forment l'angle dièdre  $DABF$ ; ces angles dièdres sont donc égaux.

3°. *L'angle des perpendiculaires varie dans le même rapport que l'angle dièdre*; en effet, soient trois plans quelconques  $AB'$ ,  $AE'$ ,  $AC'$  (*fig. 146*), qui se coupent suivant une droite  $AA'$ ; si par un point quelconque  $A$  de l'intersection, on mène dans les trois plans des perpendiculaires  $AB$ ,  $AE$ ,  $AC$ , à cette intersection, ces perpendiculaires seront dans un plan perpendiculaire à  $AA'$  (n° 130). Il s'agit de prouver que

$$(1) \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{l'angle dièdre } BAA'C : \text{l'angle dièdre } BAA'E \\ \qquad \qquad \qquad :: \text{l'angle } BAC : \text{l'angle } BAE. \end{array} \right.$$

Lorsque les angles  $BAC$ ,  $BAE$ , sont dans un rapport commensurable, si l'on décrit un arc  $REC$  de  $A$  comme centre avec un rayon quelconque, les arcs  $BC$ ,  $BE$ , seront entre eux dans le même rapport. Supposons que le rapport donné soit celui de  $q$  à  $q'$ ; si l'on divise l'arc  $BC$  en  $q$  parties égales, l'une de ces parties sera contenue  $q'$  fois dans l'arc  $BE$ ; de sorte qu'on aura

$$\text{l'angle } BAC : \text{l'angle } BAE :: q : q'.$$

Menant un plan par chaque point de division de l'arc  $BC$  et par la droite  $AA'$ , il résulte de (2°) que l'angle dièdre  $BAA'C$  sera divisé en  $q$  parties égales, et que l'angle dièdre  $BAA'E$  contiendra  $q'$  de ces parties; on aura donc,

$$\text{l'angle dièdre } BAA'C : \text{l'angle dièdre } BAA'E :: q : q'.$$

Ces deux dernières proportions font voir que

$$\begin{aligned} & \text{l'angle dièdre } BAA'C : \text{l'angle dièdre } BAA'E \\ & :: \text{l'angle } BAC : \text{l'angle } BAE. \end{aligned}$$

4°. La proportion (1) convenant à des angles commensurables quelconques, on a démontré (*Algèbre*, n° 13) qu'elle doit encore subsister quand les angles rectilignes BAC, BAE, sont incommensurables.

On peut d'ailleurs démontrer directement cette propriété. En effet, si le dernier terme de la proportion (1) n'était pas l'angle BAE, il serait plus grand ou plus petit. Supposons-le plus grand, et soit, s'il est possible,

$$(2) \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{angle dièdre } BAA'C : \text{angle dièdre } BAA'E \\ :: \text{angle } BAC : \text{angle } BAP. \end{array} \right.$$

Divisons l'arc BC en parties égales moindres que EP, il tomberait au moins un point de division R sur EP; et en menant le plan AA'R'R, les arcs BC, BR, seraient commensurables; on aurait donc

$$\begin{aligned} & \text{angle dièdre } BAA'C : \text{angle dièdre } BAA'R \\ & :: \text{angle } BAC : \text{angle } BAR. \end{aligned}$$

Cette proportion, combinée avec la précédente, donnerait

$$\begin{aligned} & \text{angle dièdre } BAA'E : \text{angle dièdre } BAA'R \\ & :: \text{angle } BAP : \text{angle } BAR. \end{aligned}$$

Mais, l'angle dièdre BAA'E est plus petit que BAA'R; il faudrait donc, pour que la dernière proportion pût exister, que l'angle BAP fût plus petit que l'angle BAR; ce qui n'a pas lieu. La proportion (1) ne peut donc pas subsister avec un quatrième terme plus grand que BAE.

On prouverait de même que cette proportion ne peut subsister avec un quatrième terme plus petit que BAE.

Donc la proportion (1) est vraie dans tous les cas; donc l'angle dièdre est mesuré par l'angle des perpendiculaires.

175. DÉFINITION. Lorsque deux plans font entre eux un angle droit, on dit qu'ils sont perpendiculaires l'un à l'autre.

176. THÉORÈME (fig. 147). *Quand deux plans se rencontrent, la somme des deux angles adjacens formés par ces plans est égale à deux angles droits.*

Soit ABC un plan qui rencontre le plan PQ; par un point D de l'intersection AB, menez EF perpendiculaire à AB dans le plan PQ, et DG perpendiculaire à AB dans le plan AC; les angles GDF, GDE, mesurent les inclinaisons du plan AC avec les deux parties BQ, BR, du plan PQ; or,  $GDF + GDE$  est égal à deux angles droits; donc le plan AC fait avec le plan PQ, deux angles adjacens dont la somme est égale à deux angles droits.

177. THÉORÈME (fig. 148). *Lorsque deux plans se coupent, ils forment des angles opposés au sommet qui sont égaux.*

Soient les deux plans PQ, CH; par un point D de leur intersection AB, menez dans les deux plans des perpendiculaires EF, GI à AB; les angles formés par ces deux perpendiculaires mesureront les angles dièdres correspondans formés par les plans; or,

$$\text{l'angle } GDE = IDF, \text{ et l'angle } GDF = IDE.$$

La proposition est donc démontrée.

178. THÉORÈME (fig. 149). *Deux plans parallèles, coupés par un troisième, jouissent des mêmes propriétés dans les angles qu'ils forment avec ce troisième plan, que deux droites parallèles à l'égard d'une troisième droite qui les coupe.*

En effet, si l'on coupe deux plans parallèles QY, NV, par un plan RF, les intersections Pz, DC, seront parallèles. Par un point quelconque z de Pz, menez un plan ST perpendiculaire à Pz; ce plan sera perpendiculaire sur la droite CD parallèle à Pz (n° 134), et les intersections du plan ST avec les plans QY, NV, RF, seront les droites Qy, Nb, aR; les deux premières droites seront parallèles; Nb et aR seront perpendiculaires à CD, aR et Qy seront perpendiculaires sur Pz; les angles formés par les droites Qy, Nb, aR, mesureront donc les angles formés par les plans QY, NV, RF. Mais, les propriétés des parallèles Qy, Nb, coupées par la droite aR, donnent

$$\text{l'angle } QzC + NCz = \text{deux angles droits,}$$

*l'angle*  $RzQ = RCN = azy = aCb$ ,  
*l'angle*  $Rzy = RCb = azQ = aCN$ .

Le principe énoncé est donc démontré.

**REMARQUE** (*fig. 150*). *La réciproque n'est pas vraie ; car il est évident, par exemple , que deux plans ABC, DEF , qui ne sont pas parallèles, peuvent former des angles égaux avec un troisième plan PQ.*

**179. THÉORÈME** (*fig. 151*). *Lorsque deux plans qui se coupent sont respectivement parallèles à deux autres plans , l'intersection des deux premiers plans est parallèle à l'intersection des deux autres , et les angles formés par les deux premiers plans sont respectivement égaux aux angles formés par les deux autres plans.*

Concevez quatre plans PQ, PR, TN, TS, parallèles deux à deux, et qui se coupent suivant les droites PZ, TG ; prolongez les plans PR, TN, jusqu'à leur intersection CD ; les intersections CD, ZP, du plan DR, avec les plans parallèles DN, PQ, seront parallèles ; les intersections CD, GT, du plan TN, avec les plans parallèles DR, TS, seront aussi parallèles ; les intersections TG, PZ seront donc parallèles entre elles.

De plus, en vertu du théorème précédent, l'angle dièdre RZPQ est égal à RCDN, et RCDN est égal à SGTN ; donc RZPQ est égal à SGTN ; ce qui démontre le principe énoncé.

**180. THÉORÈME** (*fig. 152*). *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan , tous les plans conduits par cette droite sont perpendiculaires au premier plan.*

Par la droite ML perpendiculaire au plan GE, menez un plan quelconque CK ; dans le plan GE, tirez LN perpendiculaire sur l'intersection CD des plans GE, CK ; la droite ML, perpendiculaire au plan GE, sera perpendiculaire à la ligne LN située dans ce plan ; l'angle MLN sera donc droit ; mais cet angle mesure l'inclinaison des plans CK, GE (n° 174) ; ces plans sont donc perpendiculaires l'un à l'autre.

**181. THÉORÈME** (*fig. 153*). *Tout plan parallèle à une perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à ce dernier plan.*



La droite  $ON$  étant perpendiculaire au plan  $GE$ , menez un plan  $CK$  parallèle à  $ON$ ; du pied  $N$  de la perpendiculaire  $ON$ , menez  $NL$  perpendiculaire sur l'intersection  $CD$  des plans  $GE$ ,  $CK$ ; par les droites  $NO$ ,  $NL$ , conduisez un plan  $ONL$ , il coupera le plan  $CK$  suivant une droite  $LM$  parallèle à  $NO$  (n° 144). Mais,  $NO$  est perpendiculaire au plan  $GE$ ;  $LM$  est donc perpendiculaire à ce même plan (n° 134); donc le plan  $CK$ , qui contient  $LM$ , est perpendiculaire au plan  $GE$  (n° 180).

**182. THÉORÈME** (*fig. 152*). *Quand deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, si par un point de l'un de ces plans on mène dans ce plan une perpendiculaire à l'intersection des deux plans, cette droite sera perpendiculaire à l'autre plan.*

Soit le plan  $CK$  perpendiculaire au plan  $GE$ ; par un point quelconque  $M$  du plan  $CK$ , menez dans ce plan une perpendiculaire  $ML$  à l'intersection  $CD$ , et, par le point  $L$ , menez dans le plan  $GE$  la droite  $LN$  perpendiculaire à  $CD$ ; l'angle  $MLN$  mesurera l'inclinaison des plans  $CK$ ,  $GE$ ; cet angle sera donc droit. Mais l'angle  $MLC$  est droit; la ligne  $ML$  est donc perpendiculaire à deux droites  $LN$ ,  $LC$ , qui passent par son pied dans le plan  $GE$ ; donc elle est perpendiculaire au plan  $GE$  (n° 128).

**183. THÉORÈME** (*fig. 152*). *Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, si d'un point quelconque de l'un de ces plans on mène une perpendiculaire à l'autre plan, elle sera tout entière dans le premier plan.*

Concevez deux plans  $CK$ ,  $GE$ , perpendiculaires l'un à l'autre, et qui se coupent suivant  $CD$ ; d'un point quelconque  $M$  du premier plan, menez  $ML$  perpendiculaire à  $CD$ ; la droite  $ML$ , située dans le plan  $CK$ , sera perpendiculaire au plan  $GE$  (n° 182). Mais, par le point  $M$ , on ne peut conduire qu'une perpendiculaire au plan  $GE$ ; la perpendiculaire menée du point  $M$  sur le plan  $GE$  est donc dans le plan  $CK$ .

**184. THÉORÈME** (*fig. 154*). *Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute perpendiculaire à l'un des plans est parallèle à l'autre plan; car les plans  $CK$ ,  $GE$ , étant perpendiculaires l'un à l'autre, si la perpendiculaire au plan  $GE$ ,*

tirée par un point quelconque  $N$  de ce plan, n'était pas parallèle au plan  $CK$ , elle rencontrerait ce plan en un point  $M$ ; menant de ce point une perpendiculaire  $ML$  sur l'intersection  $CD$  des plans  $GE$ ,  $CK$ , la ligne  $ML$  serait perpendiculaire au plan  $GE$  (n° 182). Mais la droite  $MN$  est aussi perpendiculaire au plan  $GE$ ; donc on pourrait abaisser du même point deux perpendiculaires à un plan; ce qui est impossible (n° 131, 1°).

**185. THÉORÈME (fig. 155).** *L'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième, est perpendiculaire à ce troisième plan.*

Soient les plans  $LN$ ,  $CK$ , perpendiculaires au plan  $GE$ ; si par le point  $B$ , pris sur l'intersection des deux premiers, on menait une perpendiculaire au plan  $GE$ , elle devrait se trouver dans chacun des plans  $LN$ ,  $CK$  (n° 183); cette perpendiculaire est donc l'intersection  $AB$  des plans  $LN$ ,  $CK$ .

**186. THÉORÈME (fig. 155).** *Tout plan perpendiculaire à deux autres, est perpendiculaire à l'intersection de ces deux derniers plans.*

Le plan  $GE$  étant perpendiculaire aux plans  $CK$ ,  $LN$ , ces deux derniers plans sont perpendiculaires au plan  $GE$ ; leur intersection  $AB$  est donc perpendiculaire au plan  $GE$  (n° 185); le plan  $GE$  est donc perpendiculaire à l'intersection  $AB$  des plans  $CK$ ,  $LN$ .

**187. THÉORÈME (fig. 156).** *Lorsqu'une droite  $CF$  n'est pas perpendiculaire à un plan  $PQ$ , on ne peut mener par cette droite qu'un seul plan perpendiculaire au plan  $PQ$ ; car si l'on pouvait conduire par la ligne  $CF$  deux plans  $CD$ ,  $CE$ , perpendiculaires au plan  $PQ$ , en tirant d'un point quelconque  $C$  de  $CF$  des perpendiculaires  $CA$ ,  $CB$ , sur les intersections  $AD$ ,  $BE$ , du plan  $PQ$  avec les plans  $CD$ ,  $CE$ , les droites  $CA$ ,  $CB$ , seraient perpendiculaires au plan  $PQ$  (n° 182); on pourrait donc mener d'un point  $C$ , deux perpendiculaires  $CA$ ,  $CB$ , au plan  $PQ$ ; ce qui est absurde.*

**188. THÉORÈME (fig. 157).** *Pour conduire par la droite  $EF$ , un plan  $EFDA$  perpendiculaire au plan  $PQ$ , il suffit de mener*

d'un point quelconque C de EF, une perpendiculaire CA au plan PQ (n° 140); le plan EFDA, conduit par les droites EF, CA, sera le plan demandé (n° 180).

Si EF était perpendiculaire au plan PQ, les droites EF, CA, se confondraient, et le plan EFDA de ces droites, pourrait prendre une infinité de positions.

189. THÉORÈME (fig. 158). Lorsque par deux droites parallèles, NA, MH, on mène des plans AP, HK, perpendiculaires à un plan GE, les intersections BP, FK, de ces plans avec le plan GE sont parallèles.

Si par deux points N, M, des parallèles NA, MH, on mène des droites NP, MK, perpendiculaires au plan GE, ces droites seront parallèles (n° 135) et situées dans les plans AP, HK (n° 183); les droites NA, NP, étant respectivement parallèles aux droites MH, MK, les plans AP, HK, de ces droites sont parallèles (n° 159); les intersections BP, FK, de ces plans avec le plan GE sont donc parallèles (n° 153).

#### § IV. Des Lignes proportionnelles.

190. THÉORÈME (fig. 159). Si d'un point I, pris hors du plan EG, on tire des droites à différens points K, L, M, A, B, C, D, F, de ce plan, et si l'on mène un plan eg parallèle à EG, qui rencontre ces droites en, k, l, m, a, b, c, d, f, les droites IK, IL, IM, IA, IB, IC, ID, IF, seront coupées en parties proportionnelles; les triangles KLM, klm, seront semblables, ainsi que les polygones ABCDF, abcdf; les surfaces de ces triangles et de ces polygones seront proportionnelles aux quarrés des perpendiculaires IP, Ip, menées du point I sur les plans EG, eg. De sorte qu'on aura

$$(1) \dots IK : Ik :: IL : Il :: IM : Im :: IA : Ia :: IB : Ib, \text{etc.},$$

$$(2) \dots \overline{IP}^2 : \overline{Ip}^2 :: KLM : klm :: ABCDF : abcdf.$$

En effet, les intersections LM, lm, du plan ILM, avec les

plans parallèles EG, *eg*, sont parallèles. Par une raison semblable, les droites MK, KL, MA, AB, BC, etc., sont respectivement parallèles aux droites *mk*, *kl*, *ma*, *ab*, *bc*, etc.; on a donc

$$\begin{aligned} \frac{MK}{mk} &= \frac{IK}{Ik} = \frac{KL}{kl} = \frac{IL}{Il} = \frac{LM}{lm} = \frac{IM}{Im} \\ &= \frac{IP}{Ip} = \frac{IA}{Ia} = \frac{AB}{ab} = \frac{IB}{Ib} = \frac{BC}{bc}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

On en déduit,  $LM : lm :: IP : Ip$ ,  $AB : ab :: IP : Ip$ ,

(1)...  $IK : Ik :: IL : Il :: IM : Im :: IA : Ia :: IB : Ib$ , etc.,

(3)...  $KL : kl :: LM : lm :: MK : mk$ .

Il résulte des proportions (1) que les droites IK, IL, IM, IA, IB, etc., sont coupées en parties proportionnelles par les plans parallèles EG, *eg*.

Les proportions (3) démontrent que les triangles KLM, *klm*, sont semblables.

On prouverait de même que les triangles ABC, ACD, ADF, sont respectivement semblables aux triangles *abc*, *acd*, *adf*; les polygones ABCDF, *abcdf*, sont donc semblables.

Les surfaces semblables étant entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, on a

$$KLM : klm :: \overline{LM}^2 : \overline{lm}^2 :: \overline{IP}^2 : \overline{Ip}^2,$$

et  $ABCDF : abcdf :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{IP}^2 : \overline{Ip}^2$ . Donc

$$(2)... \overline{IP}^2 : \overline{Ip}^2 :: KLM : klm :: ABCDF : abcdf.$$

191. THÉORÈME (*fig. 160*). Deux droites, situées d'une manière quelconque dans l'espace, sont coupées en parties proportionnelles par trois plans parallèles.

Concevez trois plans parallèles L, M, N, qui coupent deux droites AB, CD, aux points A, P, B, C, R, D; menez la parallèle CK à AB, qui rencontre les plans M, N, en H et K; les lignes HR, KD, sont parallèles (n° 153); les droites CK, CD, sont donc

coupées en parties proportionnelles aux points H, R; on a donc

$$CH : HK :: CR : RD. \text{ Or, } AP = CH, PB = HK \text{ (n° 157);}$$

donc,

$$AP : PB :: CR : RD.$$

### § V. Propriétés des Angles solides.

192. DÉFINITION. *L'espace compris entre plusieurs plans qui se réunissent en un même point, se nomme ANGLE SOLIDE.* Ainsi (fig. 161), les plans BDE, BEF, BDF, forment l'angle solide B; les arêtes de cet angle solide sont les intersections BD, BE, BF, de ces trois plans; et les angles plans DBE, EBF, DBF, sont les faces de l'angle solide.

193. THÉORÈME (fig. 161). *Lorsque trois angles plans forment un angle solide, chaque angle plan est plus petit que la somme des deux autres.*

Il suffit de prouver que le plus grand des trois angles plans est moindre que la somme des deux autres. Concevez un angle solide B, formé par trois angles plans DBE, EBF, DBF, et supposez que DBF soit le plus grand de ces trois angles. Dans le plan DBF, menez la droite BK sous un angle  $DBK = DBE$ ; prenez  $BH = BE$ ; par un point quelconque F de BF, et les points H, E, tirez les droites FHD, FE; menez la droite DE. Les triangles DBE, DBH, seront égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux; les côtés DE, DH, seront donc égaux. Or,

$$DH + HF < DE + EF; \text{ donc } HF < EF.$$

Les côtés BF, BH, du triangle HBF, étant respectivement égaux aux côtés BF, BE, du triangle EBF, et HF étant plus petit que EF, on sait que l'angle HBF est plus petit que EBF. Mais les angles HBD, EBD, sont égaux; donc

$$HBF + HBD < EBF + EBD, \text{ ou } DBF < EBF + EBD.$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

194. THÉORÈME (fig. 162). *La somme des angles plans, qui*

*forment un angle solide CONVEXE (\*), est moindre que quatre angles droits.*

Menons un plan qui coupe les faces de l'angle solide  $A$ , suivant le polygone  $CBEFD$  ; si, d'un point quelconque  $M$ , pris dans l'intérieur de ce polygone, on tire des droites  $MC, MB, ME, MF, MD$ , aux sommets des angles du polygone, le théorème précédent donnera

$$MCB + MCD < ACB + ACD, \quad MBC + MBE < ABC + ABE, \text{ etc.}$$

Cela posé : considérons les côtés du polygone comme servant de bases aux triangles dont les sommets sont en  $M$ , et à ceux dont les sommets sont en  $A$  ; nous pouvons déjà conclure que la somme des angles à la base des premiers est plus petite que la somme des angles à la base des seconds. Mais il y a autant de triangles autour du point  $M$  qu'autour du point  $A$  ; donc la somme de tous les angles des premiers est égale à la somme de tous les angles des derniers ; donc la somme des angles qui sont au point  $M$  doit être plus grande que la somme des angles qui sont au point  $A$ . Or, la somme des angles en  $M$  est égale à quatre angles droits ; donc la somme des angles plans assemblés en  $A$  est moindre que quatre angles droits.

195. THÉORÈME (fig. 163). *Lorsque les trois angles plans qui forment un angle solide, sont respectivement égaux aux trois angles plans qui forment un autre angle solide, les angles plans égaux sont également inclinés l'un sur l'autre.*

Concevez deux angles solides  $S, S'$ , formés par trois angles plans égaux chacun à chacun,

$$DSE = D'S'E', \quad DSF = D'S'F', \quad ESF = E'S'F'.$$

Pour démontrer que l'angle formé par les plans  $DSE, DSF$ , est égal à l'angle formé par les plans  $D'S'E', D'S'F'$ , il suffit de faire voir que les angles rectilignes qui mesurent ces angles dièdres sont égaux entre eux. A cet effet, par un point quelcon-

(\*) On dit qu'un angle solide est *convexe*, lorsqu'une droite ne peut pas rencontrer ses faces en plus de deux points.

que  $A$  de l'intersection  $SD$  des plans  $DSE$ ,  $DSF$ , on mènera dans ces plans des perpendiculaires  $AB, AC$ , à l'intersection  $SD$ ; l'angle  $BAC$  mesurera l'inclinaison des plans  $ASB$ ,  $ASC$ . Prenant  $S'A' = SA$ , et menant dans les plans  $D'S'E'$ ,  $D'S'F'$ , des perpendiculaires  $A'B', A'C'$ , sur l'intersection  $S'D'$  de ces deux plans, l'angle  $B'A'C'$  mesurera l'inclinaison des plans  $A'S'B'$ ,  $A'S'C'$ . Il suffit donc de démontrer que les angles  $BAC$ ,  $B'A'C'$  sont égaux. Cela n'offre aucune difficulté; car les angles  $ASB$ ,  $A'S'B'$  étant égaux par hypothèse, et les angles  $BAS$ ,  $B'A'S'$ , étant droits par construction, les triangles  $BAS$ ,  $B'A'S'$ , ont un côté égal  $AS = A'S'$ , et les angles adjacens égaux; ces triangles sont donc égaux. On prouverait de même que les triangles rectangles  $CAS$ ,  $C'A'S'$ , sont égaux; donc

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad SB = S'B', \quad SC = S'C'.$$

Les triangles  $BSC$ ,  $B'S'C'$ , ayant un angle égal  $BSC = B'S'C'$ , compris entre côtés égaux, sont égaux; donc  $BC = B'C'$ ; les triangles  $BAC$ ,  $B'A'C'$ , sont donc égaux, et par suite, les angles  $BAC$ ,  $B'A'C'$ , sont égaux; l'angle des plans  $ASB$ ,  $ASC$ , est donc égal à celui des plans  $A'S'B'$ ,  $A'S'C'$ .

**1<sup>re</sup> REMARQUE.** Lorsque les droites  $SE$ ,  $S'E'$ , sont placées du même côté par rapport aux plans  $DSF$ ,  $D'S'F'$ , les angles solides  $S, S'$ , sont égaux. Lorsque ces droites tombent de différens côtés des mêmes plans, les angles solides  $S, S'$ , ne peuvent plus coïncider; on dit alors que ces angles sont **SYMÉTRIQUES**, parce que toutes leurs parties constituantes sont les mêmes, mais disposées seulement dans un ordre inverse.

En effet, les angles  $DSE$ ,  $DSF$ , sont respectivement égaux aux angles  $D'S'E'$ ,  $D'S'F'$ , et les plans de ces angles sont également inclinés. Par conséquent :

**1<sup>o</sup>.** Lorsque les droites  $SE$ ,  $S'E'$ , tomberont du même côté des plans  $DSF$ ,  $D'S'F'$ , en plaçant les angles égaux  $DSF$ ,  $D'S'F'$ , l'un sur l'autre, de manière que leurs côtés coïncident, les plans  $DSE$ ,  $D'S'E'$ , coïncideront, et  $SE$  tombera sur  $S'E'$ ; de sorte que les plans des angles solides  $S, S'$ , coïncideront; ces angles solides seront donc égaux.

2°. Quand la droite  $SE$ , étant placée en avant du plan  $DSF$ , la droite  $S'E'$  est placée derrière le plan  $D'S'F'$ , en  $S'E''$  par exemple; si l'on pose l'angle  $D'S'F'$  sur son égal  $DSF$ , les plans  $D'S'E''$ ,  $F'S'E''$ , tomberont derrière le plan  $DSF$ , et leur intersection  $S'E''$  tombera en  $Sc$ , derrière le plan  $DSF$ , tandis que la droite  $SE$  est en avant de ce plan; les faces des angles solides  $S$ ,  $S'$ , ne pourront donc pas coïncider; ces angles solides seront *symétriques*. Prenant  $Sb = SB$ , et tirant les droites  $bA$ ,  $bC$ , toutes les faces de la pyramide triangulaire  $SAbC$  seront respectivement égales aux faces de la pyramide  $SABC$ ; les inclinaisons de ces faces seront les mêmes, mais les pyramides ne pourront pas coïncider, et seront *symétriques*.

*Les solidités de ces pyramides sont égales (\*)*.

2° REMARQUE. Si l'on appliquait la face  $ASC$  sur une *glace plane*, la pyramide  $BASC$  se peindrait de l'autre côté de la glace en  $bASC$ .

Cette propriété est générale : *lorsqu'on présente un corps devant une glace plane, on aperçoit dans la glace le corps symétrique*. Les parties constituantes de ces deux corps sont les mêmes, elles sont seulement disposées dans un ordre inverse.

196. THÉORÈME (fig. 164). *Si d'un point pris dans l'intérieur d'un angle dièdre, on abaisse des perpendiculaires sur les deux plans qui forment cet angle dièdre, l'angle formé par ces perpendiculaires sera le supplément de l'angle dièdre formé par ces deux plans.*

Par un point quelconque  $P$ , menez des perpendiculaires  $PC$ ,  $PN$ , aux plans  $AX$ ,  $AY$ ; le plan  $CPN$ , conduit par ces deux lignes, étant perpendiculaire aux plans  $AX$ ,  $AY$  (n° 180), sera perpendiculaire à l'intersection  $AB$  de ces deux derniers plans (n° 186); les droites  $QC$ ,  $QN$ , intersections de ces plans avec le plan  $CPN$ , seront donc perpendiculaires sur  $AB$ ; l'angle  $CQN$  mesurera donc l'inclinaison des plans  $AX$ ,  $AY$ . Mais, dans le quadrilatère  $QCPN$ , les angles  $N$  et  $C$  étant droits,

---

(\*) Voyez la Géométrie de LEGENDRE.



la somme des angles  $Q, P$ , vaut deux angles droits. L'angle  $CPN$ , formé par les perpendiculaires  $PC, PN$ , aux plans  $AX, AY$ , est donc le *supplément* de l'angle  $CQN$  formé par ces plans.

197. THÉORÈME (fig. 165). *Si d'un point pris dans l'intérieur d'un angle solide triple (\*), on abaisse des perpendiculaires sur les trois faces, ces perpendiculaires seront les arêtes d'un nouvel angle solide triple, et les angles plans de l'un quelconque de ces deux angles solides seront les suppléments des angles dièdres correspondans de l'autre angle solide.*

En effet, soient  $SA, SB, SC$ , les arêtes d'un angle solide triple  $S$ ; les perpendiculaires  $OP, OQ, OR$ , abaissées d'un point intérieur  $O$  sur les faces  $ASB, ASC, BSC$ , seront les arêtes d'un nouvel angle solide triple  $O$ .

Cela posé: 1°. les droites  $OP, OQ$ , étant respectivement perpendiculaires aux faces  $ASB, ASC$ , on a vu (n° 196) que l'angle plan  $POQ$  de l'angle solide  $O$  est le supplément de l'angle dièdre  $BASC$  formé par les faces  $ASB, ASC$ , de l'angle solide  $S$ .

On prouverait de la même manière que les angles plans  $POR, QOR$ , de l'angle solide  $O$ , sont les suppléments des angles dièdres  $ABSC, ACSB$ , formés par les faces de l'angle solide  $S$ .

2°. Le plan  $POQ$  passant par deux droites  $OP, OQ$ , respectivement perpendiculaires aux faces  $ASB, ASC$ , est perpendiculaire à l'intersection  $SA$  de ces deux faces; ainsi, l'arête  $SA$  de l'angle solide  $S$ , est perpendiculaire à la face  $POQ$  de l'angle solide  $O$ . Par une raison semblable, les deux autres arêtes  $SB, SC$ , de l'angle solide  $S$ , sont respectivement perpendiculaires aux deux autres faces  $POR, QOR$ , de l'angle solide  $O$ .

Par conséquent, il résulte du principe général qui a été démontré (1°), que les angles plans de l'angle solide  $S$  sont les suppléments des angles dièdres de l'angle solide  $O$ .

L'angle solide  $O$ , formé par les perpendiculaires  $OP, OQ, OR$ , aux faces de l'angle solide  $S$ , se nomme ordinairement l'*angle solide supplémentaire* de l'angle solide  $S$ .

(\*) On appelle *angle solide triple* ou *angle trièdre*, l'angle formé par trois plans qui se coupent en un point.

§ VI. *Propriétés relatives aux centres des parallélogrammes et des parallélépipèdes. Propriétés relatives à la sphère.*

198. Le *centre* d'un polygone ou d'un polyèdre est le point qui divise en deux parties égales toute droite menée par ce point, et terminée à deux côtés du polygone ou à deux faces du polyèdre.

La même définition s'applique aux lignes et aux surfaces courbes.

199. 1<sup>er</sup> THÉORÈME. (*fig. 20*). *Le point de rencontre des diagonales d'un parallélogramme est le milieu de ces diagonales ; ce point est le centre du parallélogramme, et les droites qui joignent les milieux des côtés opposés passent par le centre.* En effet :

1°. Soit O le point d'intersection des diagonales AC, BD, du parallélogramme ABCD. Il faut prouver que toute droite EF, menée par le point O, y est divisée en deux parties égales OE, OF. Or, les côtés AB, DC, étant égaux et parallèles, l'angle  $\text{ABO} = \text{CDO}$ , et l'angle  $\text{BAO} = \text{DCO}$  ; les triangles OAB, OCD, sont donc égaux ; on a donc,  $\text{OA} = \text{OC}$ ,  $\text{OB} = \text{OD}$ .

2°. On peut conclure de (1°) que les triangles OAF, OCE, sont égaux, car ils ont

*l'angle*  $\text{OAF} = \text{OCE}$ , *l'angle*  $\text{AOF} = \text{COE}$ , et le côté  $\text{OA} = \text{OC}$ .

Donc  $\text{OE} = \text{OF}$ . Le point O est donc le centre du parallélogramme.

3°. Si l'on tire une droite MON par le milieu M du côté AB et par le centre O, on prouvera comme ci-dessus que les triangles OAM, OCN, sont égaux ; donc  $\text{AM} = \text{CN}$ .

Or,  $\text{AB} = \text{CD}$ ,  $\text{AM} = \frac{1}{2} \text{AB} = \frac{1}{2} \text{CD}$  ; donc  $\text{CN} = \frac{1}{2} \text{CD}$ .

Le point N est donc le milieu de CD. La droite, menée par les milieux de deux côtés opposés d'un parallélogramme, passe donc par le centre de ce parallélogramme.

2° THÉORÈME. *Toutes les diagonales d'un parallélépipède se coupent en un même point, qui est le milieu de ces diagonales ;*

*ce point est le centre du parallélépipède, et les trois droites qui joignent les centres des faces opposées passent par le centre du parallélépipède.*

Soit le parallélépipède DG (fig. 166). On sait que toutes ses faces sont des parallélogrammes.

Pour démontrer que deux diagonales quelconques DG, AF, du parallélépipède DG, se coupent en un point O, on observe que les droites AG, DF, étant égales et parallèles à CE, sont égales et parallèles entre elles; et par conséquent, les diagonales DG, AF se rencontrent, puisqu'elles sont dans le plan des deux parallèles AG, DF.

De plus, si l'on mène les droites AD, GF, la figure ADFG sera un parallélogramme, et l'on a prouvé que dans ce parallélogramme, les diagonales DG, AF, se coupent en un point O, qui est le milieu de ces diagonales. Donc,  $OD = OG$  et  $OA = OF$ .

Il est facile de faire voir que toutes les autres diagonales du parallélépipède passent par le milieu O de la diagonale DG; car en tirant une diagonale quelconque CH, les droites HG, DC, égales et parallèles à FE, sont égales et parallèles entre elles, et en menant les droites DH, CG, la figure CDHG est un parallélogramme, dans lequel la diagonale CH passe par le milieu O de la diagonale DG; on a  $OC = OH$ .

Le milieu O de la diagonale DG est le centre du parallélépipède; car en menant par ce point une droite PQ qui rencontre les faces BG, DE, en P et Q, les intersections PG, QD, du plan PGDQ, avec les plans parallèles BG, DE, seront parallèles; mais  $OG = OD$ ; les triangles équiangles OPG, OQD, sont donc égaux; la droite PQ est donc divisée en deux parties égales au point O; ce point est donc le centre du parallélépipède.

Enfin, toute droite menée par les centres de deux faces opposées, passe par le centre O du parallélépipède; car en conduisant un plan par les parallèles DC, HG, il coupera les faces parallèles BDFH, ACEG, suivant des droites DH, CG, qui seront parallèles; les milieux M, L, de ces droites, seront les centres des faces opposées BDFH, ACEG, et l'on a fait voir que dans le parallélogramme DCGH, la droite qui joint les milieux M, L,

des côtés DH, CG, passe par le centre O de ce parallélogramme.

200. PROBLÈME (fig. 167). Connaissant les côtés d'un parallélépipède rectangle, déterminer la grandeur de la diagonale, ainsi que les angles qu'elle forme avec ces côtés.

Désignez les côtés connus, FH, FD, FE, par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , la diagonale AF par  $d$ , et les angles AFH, AFD, AFE, par  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ ; tirez les droites BF, AH, AE, AD; les angles BHF, ABF, étant droits, vous aurez

$$\overline{BF}^2 = a^2 + b^2, \quad \overline{AF}^2 = d^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BA}^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Les angles FHA, FDA, FEA, étant droits, les sinus de ces angles sont égaux au rayon des lignes trigonométriques, et les angles FAH, FAD, FAE, sont les complémens des angles  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ . Supposant donc le rayon égal à l'unité, les triangles rectangles FHA, FDA, FEA, donneront

$$FA : FH :: \sin AHF : \sin FAH, \text{ ou } d : a :: 1 : \cos \alpha,$$

$$FA : FD :: \sin ADF : \sin FAD, \text{ ou } d : b :: 1 : \cos \zeta,$$

$$FA : FE :: \sin AEF : \sin FAE, \text{ ou } d : c :: 1 : \cos \gamma.$$

On a donc

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad \cos \alpha = \frac{a}{d}, \quad \cos \zeta = \frac{b}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{d}.$$

Ces formules serviront à trouver les valeurs des quatre inconnues,  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ .

Si l'on ajoute les quarrés des trois cosinus, on trouvera

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \zeta + \cos^2 \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2} = \frac{d^2}{d^2} = 1.$$

On voit donc que la somme des quarrés des cosinus des angles que la diagonale d'un parallélépipède rectangle fait avec trois arêtes contiguës de ce parallélépipède, est égale au quarré du rayon des lignes trigonométriques.

201. THÉORÈME (fig. 168). Deux plans se rencontrent nécessairement, lorsqu'ils sont respectivement perpendiculaires à deux droites qui ne sont pas parallèles.

Les droites EF, GH, n'étant pas parallèles, conduisez deux

plans AD, BR, respectivement perpendiculaires à ces droites; si ces plans ne se rencontraient pas, ils seraient parallèles; la droite EF, perpendiculaire au plan AD, serait aussi perpendiculaire au plan BR, parallèle au plan AD (n° 155); les droites EF, GH, perpendiculaires au plan BR, seraient donc parallèles (n° 135), ce qui est contre l'hypothèse.

202. THÉORÈME (fig. 169). *La droite AC étant perpendiculaire au plan PQ, et la droite GH n'étant pas parallèle à ce plan, tout plan perpendiculaire à GH, rencontre la droite AC.*

Menez le plan BR perpendiculaire à GH; si ce plan ne rencontrait pas la droite AC, il serait parallèle à cette droite; mais AC est perpendiculaire au plan PQ; le plan BR serait donc perpendiculaire au plan PQ (n° 181); la ligne GH, perpendiculaire au plan BR, serait donc parallèle au plan PQ (n° 184), ce qui est contre l'hypothèse. Tous les plans perpendiculaires à GH, rencontrent donc la droite AC.

203. THÉORÈME (fig. 170). *Lorsque par le milieu d'une droite on mène un plan perpendiculaire à cette droite, il en résulte que :*

1°. *Les distances de chaque point du plan aux extrémités de la droite sont égales entre elles ;*

2°. *Les points de ce plan, jouissent seuls de cette propriété.*

1°. Par le milieu B de AD, conduisez le plan GE perpendiculaire sur AD; d'un point quelconque R du plan GE, menez des droites aux extrémités de AD, et tirez BR; les angles RBA, RBD, seront droits; or,  $BA = BD$ , les triangles rectangles RBA, RBD, sont donc égaux; les distances RA, RD, sont donc égales.

2°. Si par un point S situé hors du plan GE, on mène la droite SA qui rencontre le plan GE en R, et si l'on tire les droites DR, DS, on aura

$RA = RD$  (1°), et  $SD < RS + RD$ ,  $SD < RS + RA$ ,  $SD < SA$ .

204. PROBLÈME (fig. 171). *Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire; ou, en d'autres termes, déterminer une sphère dont la surface passe par les quatre sommets d'une pyramide triangulaire.*

Soit la pyramide triangulaire  $ABCD$ ; la surface de la sphère devant passer par les quatre sommets  $A, B, C, D$ , le centre de la sphère doit être également éloigné de ces quatre points. Cela posé : tous les points également distans des extrémités  $B, C$ , de  $BC$ , sont dans le plan  $MPE$  conduit perpendiculairement à  $BC$ , par le milieu  $M$  de  $BC$  (n° 203); le centre de la sphère demandée est donc situé dans le plan  $MPE$ . Si par le milieu  $N$  de  $CD$ , on mène un plan  $NPE$  perpendiculaire à  $CD$ , le centre devra aussi se trouver dans ce plan. Le centre sera donc situé sur l'intersection  $PE$  des plans  $MPE, NPE$ . Or, le centre doit aussi se trouver dans le plan  $GH$  perpendiculaire sur le milieu  $Q$  de  $AB$ ; l'intersection  $I$  de ce plan avec la droite  $PE$ , sera donc le centre de la sphère demandée. Et en effet, les plans  $MPE, NPE, GH$ , étant respectivement perpendiculaires sur les milieux des droites  $BC, CD, AB$ , le point  $I$  qui appartient à ces trois plans est également distant de  $B$  et  $C$ , de  $C$  et  $D$ , de  $B$  et  $A$  (n° 203); les droites  $IA, IB, IC, ID$ , sont donc égales. La sphère décrite du point  $I$  comme centre, avec le rayon  $IA$ , passera donc par les quatre sommets  $A, B, C, D$ , de la pyramide.

*Le centre  $I$  existe toujours.* En effet, les droites  $CB, CD$ , se coupant, les plans  $MPE, NPE$ , perpendiculaires à ces droites, se rencontrent toujours suivant une droite  $PE$  (n° 201); les droites  $CB, CD$ , étant respectivement perpendiculaires aux plans  $MPE, NPE$ , le plan  $BCD$  est perpendiculaire à chacun des plans  $MPE, NPE$ , (n° 180); le plan  $BCD$  est donc perpendiculaire à l'intersection  $PE$  (n° 186); d'ailleurs, la droite  $AB$  n'étant jamais parallèle au plan  $BCD$ , le plan  $GH$ , perpendiculaire sur  $AB$ , rencontre toujours  $PE$  en un point  $I$  (n° 202); et l'on a démontré que ce point est le centre de la sphère demandée.

*Il n'existe qu'un seul centre  $I$ ;* car les trois plans  $MPE, NPE, GH$ , ne peuvent se couper qu'en un seul point; et tout point qui ne serait pas situé dans ces trois plans, ne serait pas également distant des quatre points donnés (n° 203, 2°).

Il suit de là qu'une sphère est entièrement déterminée, lorsque sa surface est assujettie à passer par quatre points donnés qui ne sont pas dans un même plan.

*L'intersection de deux sphères est donc une courbe plane (\*) ; car si quatre points de cette intersection n'étaient pas dans un même plan, les deux sphères passant par ces quatre points se confondraient, ce qui est contre l'hypothèse.*

**205. THÉORÈME** (fig. 172). *Lorsqu'un plan divise l'angle de deux autres plans en deux parties égales, il en résulte que :*

*1°. Les perpendiculaires menées d'un point quelconque du premier plan, sur les deux autres plans, sont égales ;*

*2°. Les points de ce plan jouissent seuls de cette propriété.*

*1°. Concevez un plan  $PzR$ , qui divise l'angle des plans  $PQ$ ,  $PX$ , en deux parties égales ; par un point  $A$ , de l'intersection  $Pz$  de ces trois plans, menez un plan  $IAH$  perpendiculaire à  $Pz$  ; les plans  $PzQ$ ,  $PzR$ ,  $PzX$ , seront perpendiculaires au plan  $IAH$  (n° 180), et ce dernier coupera les trois autres suivant des droites  $AH$ ,  $Ag$ ,  $AI$ , perpendiculaires à  $Pz$  ; les angles formés par ces droites mesureront donc les inclinaisons des plans  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PX$  ; les angles  $gAH$ ,  $gAI$ , seront donc égaux.*

*D'un point quelconque  $g$ , de l'intersection des plans  $PR$ ,  $IAH$ , menez dans ce dernier plan des perpendiculaires  $gH$ ,  $gI$ , sur les intersections  $AH$ ,  $AI$  ; les droites  $gH$ ,  $gI$ , seront perpendiculaires aux plans  $PQ$ ,  $PX$  (n° 182) ; les triangles rectangles  $AIg$ ,  $AHg$ , seront égaux, comme ayant la même hypoténuse  $Ag$ , et l'angle aigu  $gAH = gAI$  ; donc  $gI = gH$ .*

*2°. Si d'un point quelconque  $p$ , situé hors du plan  $PR$ , on mène des perpendiculaires  $pq$ ,  $pH$ , sur les plans  $PX$ ,  $PQ$ , ces perpendiculaires seront inégales. En effet, du point  $g$ , où la droite  $pH$  rencontre le plan  $PR$ , menez  $gI$  perpendiculaire au plan  $PX$  ; joignez le pied  $I$  de cette perpendiculaire avec  $p$  ;  $gI$  sera égal à  $gH$  (1°), et la perpendiculaire  $pq$  au plan  $PX$  sera plus courte que l'oblique  $pI$ . Or, le triangle  $pgI$  donne*

$$pI < pg + gI ; \text{ donc } pI < pg + gH, \text{ ou } pI < pH.$$

---

(\*) On dit qu'une courbe est plane, lorsque tous ses points sont dans un même plan. Une courbe est dite à double courbure, quand tous ses points ne sont pas dans un même plan.

Mais ,  $pq < pl$  ; donc  $pq < pH$ .

206. PROBLÈME (fig. 173). *Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire ; c'est-à-dire , déterminer une sphère dont la surface soit tangente aux quatre faces d'une pyramide triangulaire.*

La sphère devant être tangente aux quatre faces de la pyramide, les quatre perpendiculaires menées du centre de cette sphère sur les faces de la pyramide, doivent être égales; le centre de la sphère doit donc se trouver dans les plans qui divisent en deux parties égales les angles dièdres formés par les faces de la pyramide (n° 205); l'intersection de ces plans sera donc le centre de la sphère inscrite.

Ainsi, pour inscrire une sphère dans la pyramide triangulaire ABCD, on mènera par les arêtes BC, BD, CD, des plans IBC, IBD, ICD, qui divisent en deux parties égales les angles formés par les faces qui se coupent suivant ces arêtes; l'intersection I de ces trois plans sera le centre de la sphère inscrite.

On démontrerait, par des raisonnemens analogues à ceux du n° 204, que le centre I existe toujours, et qu'il n'existe qu'une seule sphère inscrite.

207. THÉORÈME (fig. 174). 1°. *Toutes les sections d'une sphère par des plans, sont des cercles; 2°. les plans également éloignés du centre de la sphère, coupent la sphère suivant des cercles égaux; 3°. les plans les plus près du centre, donnent les cercles les plus grands; 4°. tous les points de la surface de la sphère, qui sont également distans d'un point fixe de cette surface, se trouvent sur une même circonférence.*

Menez un plan quelconque BGEH; ce plan coupera la surface de la sphère CA, suivant une courbe BGEH; par le centre C de la sphère, tirez une perpendiculaire CF au plan BGEH; du pied F de cette perpendiculaire, menez des droites FB, FG, FE, FH, etc., aux points B, G, E, H, etc., et tirez les rayons CB, CG, CE, CH, etc.

1°. Le centre C étant également distant de tous les points de la surface de la sphère, les obliques CB, CG, CE, CH, etc.,



sont égales; elles s'écartent donc également du pied F de la perpendiculaire CF (u° 131); les droites FB, FG, FE, FH, etc., sont donc égales, la courbe BGEH est donc une circonférence dont le centre est F. La section de la sphère, par le plan BGEH, est donc un cercle dont le centre est le pied F de la perpendiculaire CF au plan BGEH, et dont le rayon est BF.

*Il en résulte que si l'on mène par le centre d'un cercle de la sphère une perpendiculaire au plan de ce cercle, cette perpendiculaire passera nécessairement par le centre de la sphère.*

Pour démontrer les deux propriétés énoncées (2°) et (3°), coupez la sphère CA par un autre plan quelconque QST; il résulte de (1°) que la section sera un cercle QRST, dont le centre sera le pied P de la perpendiculaire CP au plan QST. Tirez le rayon PQ et l'oblique CQ; les triangles rectangles CFB, CPQ, donneront

$$\overline{CF}^2 + \overline{FB}^2 = \overline{CB}^2, \quad \overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{CQ}^2. \text{ Mais, } CB = CQ; \text{ donc,}$$

$$\overline{CF}^2 + \overline{FB}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2; \text{ d'où } \overline{CF}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{PQ}^2 - \overline{FB}^2.$$

Dans cette dernière équation,

CP = CF donne PQ = FB, et PQ = FB donne CP = CF;

CP < CF donne PQ > FB, et PQ > FB donne CP < CF.

Ce qui démontre les principes énoncés (2°) et (3°).

Dans l'équation  $\overline{PQ}^2 = \overline{CQ}^2 - \overline{CP}^2$ , le rayon CQ étant constant, on voit que *tous les plans conduits par le centre de la sphère, donnent des cercles égaux; que ces cercles sont plus grands que ceux qui résultent de la section de la sphère par des plans qui ne passent pas par le centre, et que les rayons de ces grands cercles sont égaux au rayon de la sphère.*

4°. Soient pris sur la surface de la sphère des points A, E, G, B, etc., également distans du point fixe N; tous les rayons CA, CE, CG, CB, etc., de la sphère sont égaux entre eux, et par hypothèse les droites NA, NE, NG, NB, etc., sont égales entre elles. Par conséquent, si l'on tire la droite CN,

les triangles  $CNA$ ,  $CNE$ ,  $CNG$ ,  $CNB$ , etc., seront égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun ; les angles  $CNA$ ,  $CNE$ ,  $CNG$ ,  $CNB$ , etc., sont donc égaux ; les points  $A$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $B$ , etc., se trouvent donc sur une circonférence  $AEGB$ , (n° 171).

**REMARQUE.** Cette dernière propriété fournit le moyen de tracer un arc de cercle sur la surface de la sphère ; car en fixant la pointe d'un compas sur un point  $N$  de la sphère, et en faisant mouvoir l'autre pointe sur la surface sphérique, sans changer l'ouverture des branches du compas, la pointe mobile décrira un arc de cercle  $AEGB$ . Le point fixe  $N$  est ce qu'on nomme le *pôle* de cet arc.

**208. THÉORÈME** (fig. 175). *L'intersection de deux sphères est un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint les centres des sphères. Cette droite passe par le centre du cercle.*

**1<sup>re</sup> Démonstration.** Soient,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , etc., des points de la ligne d'intersection de deux sphères dont les centres sont en  $O$  et  $O'$  ; les triangles  $OA O'$ ,  $OB O'$ ,  $OC O'$ ,  $OD O'$ , etc., seront égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Les droites égales  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ , etc., formeront donc des angles égaux avec la droite  $OO'$  ; les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , etc., seront donc sur une circonférence dont le plan  $ABC$  sera perpendiculaire à  $OO'$ , et  $OO'$  passera par le centre  $P$  de cette circonférence (n° 171).

**2<sup>e</sup> Démonstration.** L'intersection de deux surfaces sphériques est une courbe plane (n° 204, page 104) ; cette courbe résultant de la section de la sphère par un plan, est une circonférence (n° 207, 1°). De plus, la droite qui joint les centres des deux sphères est perpendiculaire au plan de la circonférence, et passe par le centre de cette circonférence ; car, d'après ce qui a été démontré (n° 207, 1°), la perpendiculaire au plan de la circonférence menée par le centre de cette circonférence, passe par les centres des deux sphères.

## § VII. Plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère.

209. THÉORÈME (fig. 138). *Le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface d'une sphère, est l'arc de grand cercle qui joint ces deux points ; c'est-à-dire que de toutes les lignes tracées sur la sphère entre deux points A, B, de cette surface, la ligne la plus courte est l'arc ADB de grand cercle qui passe par A et B (\*)*. En effet,

1°. Si  $AmnpB$  est la ligne la plus courte qui puisse exister sur la sphère entre les points A, B, une partie quelconque,  $mnp$ , de cette ligne sera le plus court chemin de  $m$  à  $p$  ; car si l'on pouvait tracer entre  $m$  et  $p$  une ligne  $mqp$  plus courte que  $mnp$ , la ligne  $AmqpB$  serait moins longue que le plus court chemin  $AmnpB$  entre A et B, ce qui est absurde.

2°. Lorsque deux arcs AD, AC, sont égaux, les DISTANCES AD, AC, sont égales ; car en faisant tourner le plan ADA' de l'arc AD autour du diamètre AA', on pourra toujours amener le point D en C ; et les arcs AD, AC, coïncidant, la distance entre les extrémités de l'un de ces arcs coïncide nécessairement avec la distance entre les extrémités de l'autre arc.

(\*) Cet arc ne peut dépasser une demi-circonférence. Tout arc dont on ne désignera pas l'espèce, sera un arc de grand cercle tracé sur la surface sphérique. Par distance entre deux points, il faudra toujours entendre la ligne la plus courte possible, tracée sur la surface de la sphère entre ces deux points ; le signe  $\delta$  indiquera cette distance. Ainsi,  $\delta AB = An + nB$  exprimera que la distance entre A et B est égale à la distance du point A au point  $n$ , augmentée de la distance de  $n$  à B ; l'inégalité,

$$\delta An + nB < AD + DB,$$

indiquera que la distance de A à  $n$ , augmentée de celle de  $n$  à B, est plus petite que la somme des distances de A à D et de D à B. Enfin, l'équation

$$\text{arc } nB + Adn < DB + AD,$$

exprimera que la somme des arcs  $nB$ ,  $Adn$ , est moindre que la somme des arcs DB, AD.

3°. Quand un arc ADB est plus grand qu'un arc AC, la distance entre A et B est plus grande que celle de A à C; la réciproque est vraie.

En effet, si AmnpB est la ligne la plus courte de A à B, l'arc CDE de petit cercle décrit de A comme pôle, coupera la ligne AmnpB en un certain point n (\*), et les arcs Adn, AC, étant égaux, il résulte de (1°) que les distances An, AC, seront égales.

Or,  $\delta AB = An + nB$ ; donc  $\delta AB > \delta AC$ .

Réciproquement, lorsqu'on a,  $\delta AB > \delta AC$ , l'arc ADB est plus grand que l'arc AC; car, d'après ce qui a été démontré, si ces deux arcs étaient égaux, on aurait  $\delta AB = \delta AC$  (2°), ce qui est contre l'hypothèse; et si l'arc ADB était moindre que l'arc AC, il en résulterait  $\delta AB < \delta AC$ , ce qui est contre l'hypothèse.

Le principe énoncé (3°) est donc démontré.

4°. Le plus court chemin de A à B, est l'arc ADB de grand cercle, conduit par ces deux points. En effet, si un point n de ce plus court chemin était situé hors de l'arc de grand cercle ADB, on pourrait tracer deux arcs de grands cercles Adn, Ben, qui ne se confondraient pas avec l'arc ADB, et l'on aurait

$$\delta AB = An + nB \text{ (1°); donc } \delta AB > An;$$

$$\text{donc, arc ADB} > Adn \text{ (3°).}$$

Prenant sur l'arc ADB une partie AD = Adn, les distances AD, An, seraient égales (2°). Or, par hypothèse,

$$\delta An + \delta nB < AD + BD; \text{ donc } \delta nB < DB.$$

Donc, l'arc neB < DB (3°); mais l'arc Adn = AD;

$$\text{donc, arc neB} + Adn < DB + AD,$$

$$\text{ou arc neB} + Adn < ADB.$$

Le côté ADB du triangle sphérique AnB serait donc plus

(\*) Cela est évident, car l'arc AB étant plus grand que l'arc AC, on peut prendre sur le premier arc une partie AD = AC; les points A, B, seront donc situés de part et d'autre du plan de l'arc CDE; la ligne la plus courte entre A et B rencontrera donc ce plan en un certain point n.

grand que la somme des deux autres; ce qui est absurde (\*). Aucun point du plus court chemin entre A et B ne peut donc se trouver hors de l'arc ADB. Ce qui démontre le principe énoncé.

**REMARQUE.** Quand les deux points donnés A, B, ne sont pas les extrémités d'un diamètre de la sphère, le plan mené par ces points et par le centre de la sphère coupe la surface sphérique suivant une circonférence ABA'F de grand cercle; cela détermine deux arcs ADB, AFA'B, qui passent par A et B; le plus petit de ces deux arcs est un arc ADB moindre que la demi-circonférence; l'arc ADB est le *plus court chemin* de A à B.

Lorsque les deux points donnés sont les extrémités A, A', d'un diamètre, chacune des demi-circonférences qui passent par A et A', exprime la plus courte distance entre A et A'.

### § VIII. Des Surfaces de révolution.

210. Lorsqu'une ligne NMP (*fig. 176*), située dans l'espace, tourne autour d'une droite fixe AD, de manière que chaque point M de cette courbe décrive une circonférence dont le centre C est sur AD, et dont le plan est perpendiculaire à AD, la surface engendrée est ce qu'on nomme une *surface de révolution*; la droite fixe AD est l'*axe de révolution*, et la ligne NMP est la *génératrice* de la surface de révolution.

Le cône droit, le cylindre droit et la sphère, sont des surfaces de révolution; car, pour engendrer ces surfaces, il suffit de prendre pour génératrice une droite qui coupe l'axe, ou une parallèle à l'axe, ou une demi-circonférence qui tourne autour de son diamètre.

### § IX. Propriétés relatives aux Surfaces gauches.

211. THÉORÈME (*fig. 177*). Si l'on divise proportionnellement les côtés opposés d'un quadrilatère gauche (\*\*), de sorte qu'on ait

(\*) Voyez la Géométrie de LEGENDRE.

(\*\*) On nomme ainsi un quadrilatère dont les quatre côtés ne sont pas dans le même plan.

$$(1) \dots DG : GC :: AH : HB, \quad AE : ED :: BF : FC,$$

*les droites GH, EF, se couperont en un point O, et l'on aura*

$$(2) \dots EO : OF :: AH : HB, \quad HO : OG :: BF : FC.$$

Menez  $BC'$  parallèle à  $AD$ , et  $DC'$  parallèle à  $AB$ ; la figure  $ABC'D$  sera un parallélogramme. Joignez  $CC'$ ; conduisez les parallèles  $FF'$ ,  $GG'$ , à  $CC'$ ; les droites  $EF'$ ,  $HG'$ , étant dans un même plan  $ABC'D$ , se rencontreront en un point  $K$ .

Je dis que  $HG'$  et  $EF'$  sont respectivement parallèles à  $AD$  et  $AB$ . En effet,  $GG'$  étant parallèle à  $CC'$ , on a

$$DG : GC :: DG' : G'C'.$$

Or, par hypothèse,  $DG : GC :: AH : HB$ . Donc,  
 $DG' : G'C' :: AH : HB$ ; d'où  $DG' + G'C' : DG' :: AH + HB : AH$ .

Mais,  $DG' + G'C' = DC'$ ,  $AH + HB = AB$  et  $DC' = AB$ .

Donc  $DG' + G'C' = AH + HB$ . Donc  $DG' = AH$ .

Les droites  $DG'$ ,  $AH$ , étant parallèles et égales, les droites  $HG'$ ,  $AD$ , sont aussi parallèles et égales.

On prouverait semblablement que  $EF'$  est parallèle à  $AB$ .

Cela posé : la droite  $CC'$  est parallèle à chacun des plans  $EFF'$ ,  $HGG'$  (n° 143), et ces plans se coupent suivant une ligne  $KR$ , qui est elle-même parallèle à  $CC'$  (n° 147), et qui passe par le point  $K$ , situé sur  $HG'$ .

Nous allons faire voir que  $KR$  va couper  $EF$  et  $GH$  au même point  $O$ . Il suffit de chercher les distances du point  $K$  à chacune des intersections de  $KR$  avec  $EF$  et  $GH$ , et de prouver que ces distances sont égales entre elles.

Désignons par  $x$  la distance du point  $K$  au point où  $EF$  rencontre  $KR$ ; chacune des droites  $RK$ ,  $CC'$ , étant parallèle à  $FF'$ , on a

$$x : FF' :: EK : EF', \quad \text{d'où } x = \frac{EK}{EF'} \times FF';$$

$$\text{et } FF' : CC' :: BF' : BC', \quad \text{d'où } FF' = \frac{BF'}{BC'} \times CC'.$$

Substituant cette valeur de  $FF'$  dans celle de  $x$ , on trouve

$$(3) \dots x = \frac{EK}{EF'} \times \frac{BF'}{BC'} \times CC'.$$

De même, si l'on désigne par  $y$  la distance du point  $K$  au point où  $GH$  rencontre  $KR$ , les parallèles  $RK$ ,  $GG'$ ,  $CC'$ , donneront

$$y : GG' :: HK : HG', \text{ d'où } y = \frac{HK}{HG'} \times GG',$$

$$\text{et } GG' : CC' :: DG' : DC', \text{ d'où } GG' = \frac{DG'}{DC'} \times CC'.$$

$$\text{On en déduit (4) } \dots y = \frac{DG'}{DC'} \times \frac{HK}{HG'} \times CC'.$$

Or, d'après ce qui précède, les trois droites  $AD$ ,  $HG'$ ,  $BC'$ , sont parallèles, et les droites  $AB$ ,  $EF'$ ,  $DC'$ , sont aussi parallèles. On a donc

$$EK = DG', \quad EF' = DC', \quad BF' = HK, \quad BC' = HG';$$

et par suite, les expressions (3), (4), de  $x$  et  $y$ , démontrent que  $x = y$ .

Les droites  $GH$ ,  $EF$ , passent donc par un même point  $O$  de  $KR$ ; elles se coupent donc au point  $O$ .

Pour trouver le rapport de  $EO$  à  $OF$ , observons que  $OK$  étant parallèle à  $FF'$ , on a  $EO : OF :: EK : KF'$ .

Or, les droites  $EK$ ,  $AH$ , sont égales, comme parallèles comprises entre parallèles.

Par une raison semblable,  $KF' = HB$ .

Donc,  $EO : OF :: AH : HB$ .

On prouvera avec la même facilité que,  $HO : OG :: BF : FC$ . Le théorème est donc démontré.

**COROLLAIRE.** Les proportions (1) et (2) démontrent que si les points  $G$ ,  $H$ ,  $E$ ,  $F$ , sont les milieux des côtés du quadrilatère gauche  $ABCD$ , le point  $O$  sera le milieu des droites  $GH$ ,  $EF$ .

Le principe du n° 24 n'est qu'un cas particulier du théorème général que nous venons de démontrer.

212. PROBLÈME (*fig. 181*). Déterminer le volume du solide

$ABCD A' B' C' D'$ , terminé par un plan horizontal  $ABCD$ , par quatre plans verticaux parallèles deux à deux  $ADD' A'$ ,  $BCC' B'$ ,  $ABB' A'$ ,  $CDD' C'$ , et par une portion de SURFACE GAUCHE  $A' B' C' D'$  (\*).

Désignez le volume demandé par  $x$ , la surface connue du parallélogramme  $ABCD$  par  $s$ , et les longueurs des arêtes  $BB'$ ,  $AA'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ , par  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ . Prolongez ces arêtes de manière que vous ayez,  $A' A'' = BB' = a$ ,  $B' B'' = AA' = a'$ ,

$$D' D'' = CC' = b, C' C'' = DD' = b'.$$

Il en résultera,  $AA'' = BB'' = a + a'$ ,  $CC'' = DD'' = b + b'$ .

Les quatre points  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$ , seront donc dans un même plan (n° 165).

Représentez le volume  $ABCD A'' B'' C'' D''$  par  $V$ ; je dis que le volume cherché en sera la moitié. Il est facile de concevoir que cela se réduit à prouver que toute section  $RMQP$  du solide  $V$ , par un plan parallèle au plan  $ABB'' A''$ , est divisée en deux parties équivalentes par la surface gauche.

Il s'agit donc de démontrer que les trapèzes  $RMKK'$ ,  $PQKK'$ , sont équivalents. Pour y parvenir, menez les droites  $B' C$ ,  $A' D'$ , qui coupent  $MQ$  et  $RP$  en  $E$  et  $E'$ ; les propriétés des parallèles donnent

$$\frac{EM}{B' B} = \frac{CE}{CB'} = \frac{C' K}{C' B'}, \text{ d'où } EM = a \times \frac{C' K}{C' B'};$$

$$\frac{EK}{CC'} = \frac{B' K}{B' C'}, \text{ d'où } EK = b \times \frac{B' K}{C' B'};$$

$$\frac{E' P}{D' D'} = \frac{A' E'}{A' D'} = \frac{A' K'}{A' D'}, \text{ d'où } E' P = b \times \frac{A' K'}{A' D'}.$$

$$\frac{E' K'}{A' A'} = \frac{D' K'}{D' A'}, \text{ d'où } E' K' = a \times \frac{D' K'}{D' A'}.$$

(\*) La surface gauche est engendrée par une droite indéfinie  $SS'$ , qui se meut parallèlement au plan fixe  $ABB' A'$ , en s'appuyant sur deux droites quelconques  $A' D'$ ,  $B' C'$ , situées dans les deux plans parallèles  $ADD' A'$ ,  $BCC' B'$ . Il en résulte que toute section de la surface gauche par un plan  $RMKK'$  parallèle au plan  $ABB' A'$ , est une droite  $KK'$ .

Si les droites  $A' D'$ ,  $B' C'$ , étaient parallèles, la surface engendrée deviendrait un plan; la surface gauche a reçu, par cette raison, le nom de *plan gauche*.



Or,  $MK = EM + EK$ ,  $PK' = E'K' + E'P$ .

Substituant les valeurs de  $EM$ ,  $EK$ ,  $E'K'$ ,  $E'P$ , on trouve

$$MK = a \times \frac{C'K}{C'B'} + b \times \frac{B'K}{B'C'},$$

$$PK' = a \times \frac{D'K'}{D'A'} + b \times \frac{A'K'}{A'D'}.$$

D'ailleurs, les plans parallèles  $ABB'A''$ ,  $RMQP$ ,  $DCC'D'$ , coupant les droites  $A'D'$ ,  $B'C'$ , en parties proportionnelles (n° 191), on a

$$\frac{C'K}{C'B'} = \frac{D'K'}{D'A'}, \quad \frac{B'K}{B'C'} = \frac{A'K'}{A'D'}.$$

Donc,  $MK = PK'$ .

On prouverait de même que  $RK' = QK$ .

Les trapèzes  $RMKK'$ ,  $PQKK'$ , sont donc égaux en surface, car ils ont même hauteur, et leurs côtés parallèles  $MK$ ,  $PK'$ ,  $RK'$ ,  $QK$ , sont égaux deux à deux.

Le solide  $x$  demandé est donc la moitié du solide  $V$ . •

Cela posé : menons le plan  $ACC'A''$ ; le solide  $V$  peut être considéré comme formé de deux prismes triangulaires tronqués, ayant pour bases  $ADC$  et  $ABC$ . Mais,

$$\text{prisme } ADCA''D''C'' = \frac{1}{3} ADC \times (AA'' + DD'' + CC''),$$

$$\text{prisme } ABCA''B''C'' = \frac{1}{3} ABC \times (AA'' + BB'' + CC'').$$

Ajoutant ces équations membre à membre, observant que les triangles  $ADC$ ,  $ABC$ , sont égaux à  $\frac{1}{2}s$ , que  $V = 2x$ , et que  $AA'' = BB'' = a + a'$ ,  $CC'' = DD'' = b + b'$ , il vient

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}s \times (AA'' + DD'' + CC'' + AA'' + BB'' + CC'') \\ &= \frac{1}{2}s(3AA'' + 3CC'') = \frac{1}{2}s(AA'' + CC'') = \frac{1}{2}s(a + a' + b + b'). \end{aligned}$$

Donc enfin, (3). . . .  $x = s \times \frac{1}{4}(a + a' + b + b')$ .

Cette formule démontre que le volume  $ABCD A'B'C'D'$ , terminé par la surface gauche  $A'B'C'D'$ , est égal au produit de la base  $ABCD$ , par le quart de la somme des hauteurs  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ .

## § X. Propriétés relatives à des Pyramides et à des Cônes.

213. THÉORÈME (fig. 178). Dans toute pyramide triangulaire ABCD, les trois droites EG, HF, IK, qui joignent les milieux des arêtes opposées (non situées dans un même plan), passent par un même point O, et elles y sont divisées en deux parties égales.

1<sup>re</sup> Démonstration. Les quatre arêtes AB, BC, CD, DA, forment un quadrilatère gauche, dont les côtés opposés sont divisés en deux parties égales par les droites EG, HF; donc ces deux droites se coupent mutuellement en deux parties égales (n° 211); la droite EG passe donc par le milieu de HF.

Les quatre arêtes AB, BD, DC, CA, forment aussi un quadrilatère gauche, dans lequel les droites IK, HF, se coupent en parties égales; la droite IK passe donc aussi par le milieu de HF.

Le théorème est donc démontré.

2<sup>e</sup> Démonstration. Tirez les droites EF, FG, GH, HE; puisque les côtés CB, CD, sont divisés aux points E, F, en deux parties égales, la droite EF est parallèle à BD et égale à  $\frac{1}{2}$  BD; par une raison semblable, HG est parallèle à BD et égale à  $\frac{1}{2}$  BD; donc EF est égal et parallèle à HG; la figure EFGH étant un parallélogramme, les diagonales EG, HF, se coupent mutuellement en deux parties égales; donc EG passe par le milieu de HF. On prouvera de même que les droites HK, KF, FI, IH, forment un parallélogramme; donc la diagonale IK passe aussi par le milieu de HF, et  $OK = OI$ . Le théorème est donc démontré.

REMARQUE (fig. 179). Par le point F et par l'arête AB, conduisez un plan, il contiendra la droite FH, et coupera le triangle CBD suivant la droite BF. Par le point O où se coupent EG et FH, menez la droite AO qui va couper BF en P; enfin, menez HQ parallèle à AP. Puisque  $BH = HA$ , on aura  $BQ = QP$ ; et puisque  $HO = OF$ , on aura  $QP = PF$ . Donc  $PF = \frac{1}{3} BF$ .

Les triangles BHQ, BAP, sont semblables, ainsi que les triangles FOP, FHQ, et

$$BH = \frac{1}{2} BA, FO = \frac{1}{2} FH; \text{ donc, } HQ = \frac{1}{2} AP, OP = \frac{1}{2} HQ = \frac{1}{4} AP.$$

On en déduit ce nouveau théorème :

Une pyramide triangulaire  $ABCD$  (fig. 179) étant donnée, si l'on mène dans la base une droite  $BF$  de l'un des sommets au milieu  $F$  du côté opposé  $CD$ , qu'on prenne le tiers  $PF$  de  $BF$ , la droite  $AP$  passera par le point  $O$  d'intersection des droites qui unissent les milieux de deux arêtes opposées quelconques (non situées dans un même plan), et cette droite sera divisée en ce point au quart de sa longueur à partir de la base  $BCD$ .

214. THÉORÈME (fig. 180). Un point  $O$  étant pris arbitrairement dans l'intérieur d'une pyramide triangulaire  $ABCD$ , si l'on mène les droites  $AO, BO, CO, DO$ , qu'on les prolonge jusqu'à ce qu'elles rencontrent en  $A', B', C', D'$ , les faces  $BCD, ACD, ABD, ABC$ , on aura  $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1$ .

On démontrera ce théorème par des considérations analogues à celles du n° 8.

215. PROBLÈME (fig. 182). Parmi tous les cônes droits circonscrits à une sphère donnée, déterminer le cône dont la surface est la plus petite possible.

Désignez par  $r$  le rayon de la sphère donnée. Sur une droite  $AB=2r$  comme diamètre, décrivez le demi-cercle  $ATB$ ; conduisez  $AE$  perpendiculaire à  $AB$ , et par un point quelconque  $S$  du prolongement de  $AB$ , tirez une tangente  $SD$  au demi-cercle  $ATB$ . Soient,  $T$  le point de tangence, et  $C$  le milieu de  $AB$ . Si le triangle  $SAD$  tourne autour de  $SA$ , le demi-cercle  $ATB$  engendrera la sphère donnée dont le centre sera  $C$ ; le cône droit engendré par le triangle  $SAD$  sera circonscrit à cette sphère, car l'hypoténuse  $SD$  engendre la surface convexe d'un cône droit qui touche la sphère suivant la circonférence dont le centre est le pied  $n$  de la perpendiculaire  $Tn$  à  $SA$ , et le côté  $AD$  engendre le cercle qui sert de base au cône, et qui est tangent en  $A$  à la sphère. Le cône ainsi déterminé, peut donc être considéré comme un cône quelconque circonscrit à la sphère donnée; la hauteur de ce cône est  $SA$ , son apothème est  $SD$ , et le rayon de sa base est  $AD$ .

La détermination du cône circonscrit ne dépendant que de

sa hauteur, tout se réduit à chercher quelle doit être cette hauteur, pour que la surface du cône circonscrit soit un *minimum*.

Si l'on représente par  $x$  la surface totale du cône circonscrit, et par  $\pi$  le rapport de la circonférence au diamètre, la surface de la base de ce cône sera  $\pi \times \overline{AD}^2$ , et sa surface convexe sera égale à  $2\pi \times AD \times \frac{1}{2} SD$ . Donc,

$$x = \pi \times \overline{AD}^2 + 2\pi \times AD \times \frac{1}{2} SD = \pi \times AD \times (SD + AD).$$

Le rayon CT étant perpendiculaire à la tangente SD, les triangles SAD, STC, sont semblables, et donnent

$$\overline{AD}^2 : \overline{CT}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{ST}^2, \quad SD : AD :: SC : CT.$$

$$\text{Donc,} \quad SD + AD : AD :: SC + CT : CT.$$

$$\text{Or, } CT = CA, \quad SC + CT = SC + CA = SA. \quad \text{Donc}$$

$$SD + AD : AD :: SA : CA; \quad \text{d'où}$$

$$\pi \times AD \times (SD + AD) : \pi \times \overline{AD}^2 :: SA : CA, \quad \text{ou}$$

$$(1) \dots x : \pi \times \overline{AD}^2 :: SA : CA.$$

Or,  $\overline{ST}^2 = SA \times SB$ ; la proportion  $\overline{AD}^2 : \overline{CT}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{ST}^2$ , devient donc,  $\overline{AD}^2 : \overline{CT}^2 :: \overline{SA}^2 : SA \times SB$ ; d'où

$$(2) \dots \overline{AD}^2 : \overline{CT}^2 :: SA : SB.$$

Multipliant les proportions (1), et (2), on trouve

$$x : \pi \times \overline{CT}^2 :: \overline{SA}^2 : CA \times SB; \quad \text{d'où } x = \pi r \times \frac{\overline{SA}^2}{\overline{SB}}.$$

Pour que cette valeur de  $x$  soit la plus petite possible, il faut et il suffit que le rapport  $\frac{\overline{SA}^2}{\overline{SB}}$  soit le plus petit possible.

Mais,  $SA = SB + BA = SB + 2r$ ; donc

$$\frac{\overline{SA}^2}{\overline{SB}} = \frac{(SB + 2r)^2}{SB} = SB + 4r + \frac{4r^2}{SB}.$$

Par conséquent, il faut que  $SB + \frac{4r^2}{SB}$  soit un *minimum*.

Mais, le produit de  $SB$  par  $\frac{4r^2}{SB}$  est une constante  $4r^2$ . On peut

donc regarder  $SB$  et  $\frac{4r^2}{SB}$  comme les deux côtés variables d'un rectangle dont la surface constante est  $4r^2$ , et dont le demi-périmètre variable  $SB + \frac{4r^2}{SB}$  doit être un *minimum*. Les côtés de ce rectangle doivent donc être égaux (n° 34, 1°); ce qui donne

$$SB = \frac{4r^2}{SB}; \text{ d'où } \overline{SB}^2 = 4r^2, \quad SB = 2r = AB,$$

$$SA = SB + AB = 4r.$$

*La hauteur du cône demandé doit donc être égale au double du diamètre de la sphère donnée.*

On peut calculer le rayon  $AD$  de la base, l'apothème  $SD$ , la surface  $x$ , et la solidité  $z$  du cône minimum, au moyen de  $r$ . En effet, on a vu que

$$SD : AD :: SC : CT.$$

D'ailleurs,  $SC = SB + BC = 2r + r = 3r = 3CT$ ;  
donc  $SD = 3AD$ .

$$\text{Mais, } \overline{SA}^2 = 16r^2 = \overline{SD}^2 - \overline{AD}^2 = 9\overline{AD}^2 - \overline{AD}^2 = 8\overline{AD}^2.$$

$$\text{Donc, } \overline{AD}^2 = \frac{16r^2}{8} = 2r^2, \quad AD = r\sqrt{2}, \quad SD = 3AD = 3r\sqrt{2}.$$

Or, on a trouvé que la surface  $x$  du cône circonscrit est égale à  $\pi r \times \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$ . Remplaçant  $SA$  et  $SB$  par leurs valeurs  $4r$ ,  $2r$ , on parvient à,  $x = 4\pi r^2 \times 2$ .

Le volume  $z$  du cône circonscrit étant égal à sa base multipliée par le tiers de sa hauteur, on a

$$z = \frac{1}{3} \times \overline{AD}^2 \times \frac{SA}{3} = \pi \times 2r^2 \times \frac{4r}{3} = \frac{4}{3} \pi r^3 \times 2.$$

Mais,  $4\pi r^2$  est la surface de la sphère inscrite, et  $\frac{4}{3} \pi r^3$  est son volume. Donc, *parmi tous les cônes circonscrits à une sphère donnée, le cône dont la surface est la plus petite possible, jouit des propriétés suivantes : sa hauteur est double du diamètre de la sphère, son apothème est le triple du rayon de sa base; sa surface et son volume sont respectivement doubles de la surface et du volume de la sphère inscrite.*

---

# TROISIÈME PARTIE.

## ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

---

§ 1<sup>er</sup>. *But de la Géométrie descriptive. Propriétés relatives aux projections des points et des lignes, et aux traces des plans.*

216. Les constructions qu'il faut effectuer pour résoudre les problèmes des n<sup>os</sup> 204 et 206, paraissent fort simples au premier coup d'œil ; mais, dans la réalité, elles ne donnent que des déterminations purement géométriques et fort difficilement exécutables. En effet, comment trouver les plans perpendiculaires sur les milieux des arêtes, ou qui divisent les angles dièdres en deux parties égales ? et ensuite, comment déterminer la droite suivant laquelle se coupent les deux premiers plans, puis le point où cette droite est rencontrée par le troisième plan ?

Ces réflexions s'appliquent à tous les problèmes qui se rapportent aux trois dimensions de l'étendue ; car, alors, il n'est plus possible de renfermer dans un seul plan les données et les constructions que la question semble exiger. Il faut donc de nouvelles méthodes pour résoudre les problèmes de cette espèce. Ces méthodes constituent la partie des Mathématiques, nommée *Géométrie descriptive*, dont l'objet spécial est de résoudre, par des constructions effectuées sur un plan, tous les problèmes qui se rapportent aux trois dimensions de l'étendue.

217. Le procédé que cette nouvelle branche des Mathématiques met en œuvre, est la *méthode des projections* ; elle consiste à rapporter à deux plans fixes qui se coupent, toutes les

parties de l'espace; de telle sorte, par exemple, qu'étant donné un point ou une ligne dans l'espace, on les remplace par des points ou des lignes situés dans les deux plans; puis on fait tourner l'un de ces plans autour de la droite d'intersection, afin de le rabattre sur l'autre plan; alors, toutes ces données, qui dérivent des premières, étant situées dans un seul plan, il faut chercher un système de constructions qui, sans sortir de ce plan, conduisent à des résultats d'où il soit facile de passer à la véritable solution du problème proposé. Nous allons entrer dans tous les détails de cet important et ingénieux procédé.

218. (*fig. 183*). La PROJECTION d'un point sur un plan, est le pied de la perpendiculaire menée du point sur le plan. Ainsi, concevez que du point A on abaisse sur le plan GE la perpendiculaire AB; le pied B de cette perpendiculaire sera la projection du point A sur le plan GE. Il est clair que le point B est la projection commune de tous les points de la droite indéfinie AB.

219. (*fig. 184*). La PROJECTION d'une ligne sur un plan est la ligne qui passe par les projections de tous les points de la première ligne. Ainsi, en abaissant des différens points de la courbe SRX, des perpendiculaires sur le plan GE, la ligne S'R'X', qui passera par les pieds de toutes ces perpendiculaires, sera la projection de la courbe SRX sur le plan GE. L'ensemble de ces perpendiculaires forme une surface de la nature de celles qu'on nomme *cyllindriques*; et il est évident que toute courbe *mnp*, tracée sur la surface de ce cylindre, aura pour projection la même ligne S'R'X'.

220. Quand la ligne SRX est droite, les perpendiculaires SS', RR', XX', etc., sont dans un même plan (n° 137) qui est perpendiculaire au plan GE (n° 180); les pieds S', R', X', etc., de ces perpendiculaires sont donc en ligne droite; la projection d'une ligne droite est donc une ligne droite.

Or, deux points déterminent une droite. Par conséquent, pour projeter la droite AM (*fig. 185*) sur le plan GE, il suffit de mener par deux points A, M, de cette droite, des perpendi-

culaires  $AB$ ,  $MD$ , au plan  $GE$ ; la droite  $BD$ , menée par les pieds de ces perpendiculaires, sera la projection demandée.

*Ainsi, la projection d'une ligne droite est la droite qui passe par les projections de deux points de la ligne donnée.*

221. Le plan perpendiculaire au plan  $GE$  (fig. 185), mené par  $AM$ , et qui contient toutes les perpendiculaires  $AB$ ,  $MD$ , etc., au plan  $GE$ , se nomme *plan projetant*; et le plan  $GE$  sur lequel se fait la projection, se nomme *plan de projection*.

222. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la projection de cette droite sur le plan est le pied de cette perpendiculaire; car les perpendiculaires menées des différens points de la droite sur le plan, se confondent avec cette droite.*

223. (fig. 186). *Lorsque deux droites sont parallèles, leurs projections sur un même plan sont parallèles.*

En effet, pour projeter les parallèles  $NA$ ,  $MH$ , sur le plan  $GE$ , il suffit de conduire par ces droites des plans  $NB$ ,  $MF$ , perpendiculaires au plan  $GE$ ; les intersections de ces plans avec le plan  $GE$ , sont des droites parallèles  $PB$ ,  $KF$ , (n° 189). Mais, ces intersections sont les projections des lignes  $NA$ ,  $MH$ ; le principe est donc démontré.

*Ainsi, pour être en état de construire les projections de deux droites parallèles, il suffit de connaître deux points de l'une des projections et un point de l'autre projection.*

224. Quand une ligne est située dans un plan parallèle à celui sur lequel on la projette, elle a évidemment pour projection une ligne qui lui est parfaitement égale; et toute ligne située dans un plan perpendiculaire au plan de projection, a pour projection une droite qui est l'intersection de ces deux plans.

225. (fig. 187). *Lorsque deux plans se coupent, si l'on projette un point sur chacun de ces plans, les perpendiculaires menées des deux projections du point sur l'intersection des deux plans, passent toujours par un même point de cette intersection.*

En effet, concevons deux plans  $xyz$ ,  $xyu$ , qui se coupent suivant la droite  $xy$ ; si d'un point  $M$ , situé hors de ces plans, on mène des perpendiculaires  $Mm$ ,  $Mm'$ , à ces plans, le plan



$mMm'$ , conduit par ces droites, coupera  $xy$  en un point  $p$ , et sera perpendiculaire aux plans  $xyz$ ,  $xyu$  (n° 180); le plan  $mMm'$  sera donc perpendiculaire à l'intersection  $xy$  des plans  $xyz$ ,  $xyu$  (n° 186); la droite  $xy$  sera donc perpendiculaire au plan  $Mmpm'$ ; cette droite sera donc perpendiculaire aux droites  $mp$ ,  $m'p$ , qui passent par son pied dans le plan  $Mp$ . Mais les points  $m, m'$ , sont les projections du point  $M$  sur les plans  $xyz$ ,  $xyu$ ; les perpendiculaires menées des points  $m, m'$ , sur l'intersection  $xy$ , passent donc par un même point  $p$  de cette intersection. Ce qui démontre le principe énoncé.

Il suit de là que *deux points situés dans deux plans qui se coupent, ne peuvent pas être les projections sur ces plans d'un même point de l'espace, si les perpendiculaires abaissées de ces deux points sur l'intersection des deux plans, ne vont pas concourir en un même point de cette intersection.*

226. Lorsque deux points  $m, m'$  (fig. 187), situés dans deux plans  $xu, xz$ , qui se coupent, sont tels, que les perpendiculaires menées par ces points sur l'intersection  $xy$  des plans, passent par un même point  $p$  de l'intersection, on peut regarder ces points comme les projections d'un même point de l'espace, et ce point est entièrement déterminé.

En effet, l'intersection  $xy$  étant perpendiculaire au plan  $mpm'$  des droites  $pm, pm'$ , (n° 128), les deux plans de projection  $xz, xu$ , qui passent par  $xy$ , sont perpendiculaires au plan  $mpm'$  (n° 180); et réciproquement, le plan  $mpm'$  est perpendiculaire à chacun des plans  $xz, xu$ ; les perpendiculaires aux plans  $xz, xu$ , menées par les points  $m, m'$ , sont donc dans le plan  $mpm'$  (n° 183); ces perpendiculaires se rencontrent donc toujours en un point  $M$ , dont  $m$  et  $m'$  sont les projections sur les plans  $xz, xu$ ; ce qui démontre la propriété énoncée.

227. Pour connaître si deux points de deux plans qui se coupent, sont les projections d'un point unique sur ces plans, il suffit de mener par ces deux points des perpendiculaires à l'intersection des plans donnés. Quand ces perpendiculaires passent par un même point de l'intersection, les deux points donnés

sont les projections d'un point unique (n° 226); et quand ces perpendiculaires ne passent pas par un même point de l'intersection, les points donnés ne sont pas les projections d'un même point de l'espace (n° 225).

**228.** Une droite est généralement déterminée, quand on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent; car en menant, par chaque projection, un plan perpendiculaire au plan de projection, la droite devra se trouver dans chacun des plans ainsi conduits (n° 220); la droite sera donc l'intersection de ces deux plans.

Par exemple, si  $ab$  et  $a'b'$  (fig. 188), sont les projections d'une droite  $AB$  sur deux plans  $xyz$ ,  $xyu$ , qui se coupent suivant  $xy$ , en menant par ces projections des plans  $abBA$ ,  $a'b'BA$ , respectivement perpendiculaires aux plans  $xyz$ ,  $xyu$ , les plans projetans  $abBA$ ,  $a'b'BA$ , contiendront la droite  $AB$ ; cette droite sera donc l'intersection de ces deux derniers plans.

Deux droites  $aa$ ,  $b'b$  (fig. 190), prises arbitrairement dans les plans de projection, ne peuvent être considérées comme les projections d'une même ligne de l'espace, que lorsque les plans menés par ces droites perpendiculairement aux plans de projection ne sont pas parallèles.

Quand les droites  $aa$ ,  $b'b$ , sont perpendiculaires à l'intersection  $xy$  en deux points différens, elles ne peuvent être les projections d'aucune ligne; car les plans menés par  $aa$  et  $b'b$ , perpendiculairement aux plans de projection, sont parallèles.

Si deux droites  $aa$ ,  $a'a$ , sont perpendiculaires à l'intersection  $xy$  en un même point, on peut les regarder comme les projections d'une ligne plane; mais cette ligne reste entièrement indéterminée dans le plan  $aaa'$ .

**229.** Les projections d'une courbe quelconque sur deux plans qui se coupent, déterminent généralement cette courbe.

Par exemple,  $abc$  et  $a'b'c'$  (fig. 189) étant les projections d'une même ligne  $ABC$ , sur les plans  $xyz$ ,  $xyu$ , si par les différens points de ces projections on mène des perpendiculaires à ces plans, ces perpendiculaires formeront deux surfaces cylindri-

ques  $abc$  CBA,  $a'b'c'$  CBA, sur lesquelles la courbe ABC devra se trouver; l'intersection de ces surfaces cylindriques déterminera donc la courbe ABC.

*Lorsqu'on prend arbitrairement une courbe dans chacun des deux plans de projection, on ne peut considérer ces deux courbes comme les projections d'une même ligne de l'espace, que dans le cas où les perpendiculaires aux plans de projection, menées par les différens points de ces deux courbes, forment des cylindres qui se coupent.*

230. Pour déterminer un plan, que nous désignerons par P, on pourrait se servir des projections sur deux plans  $xyz$ ,  $xyu$  (fig. 190), qui se coupent, de trois points situés dans le plan P, car trois points déterminent un plan. Mais, on a trouvé plus commode de fixer la position d'un plan au moyen de ses intersections  $aa'$ , avec les plans de projection  $xyz$ ,  $xyu$ . Ces intersections sont ce qu'on nomme les *traces* du plan P, sur les plans de projection.

*Quand deux traces  $aa'$ , d'un plan sont données, la position de ce plan est entièrement déterminée (n° 119).*

Lorsque le plan P n'est pas parallèle à l'intersection  $xy$  des plans de projection, il la rencontre en un point  $a$  qui appartient nécessairement à ses deux traces.

Si le plan est parallèle à  $xy$ , ses deux traces seront aussi parallèles à  $xy$ . Si le plan est perpendiculaire à  $xy$ , ses deux traces seront aussi perpendiculaires à  $xy$ . Si le plan est parallèle à l'un des plans de projection, sa trace sur l'autre plan sera parallèle à  $xy$ ; alors cette trace suffit pour déterminer le plan.

Enfin, si le plan P passe par la ligne  $xy$ , sa position ne sera plus déterminée; il faudra donner sa trace sur un nouveau plan, qui coupe les deux premiers suivant une autre ligne que  $xy$ .

231. On voit déjà, par ce qui précède, qu'en rapportant les points et les lignes situés dans l'espace, à deux plans qui se coupent, il est facile de déterminer ces points et ces lignes par d'autres points et d'autres lignes situés dans ces plans.

Jusqu'à présent, l'angle formé par les deux plans de projection est resté arbitraire. Nous supposerons dans tout ce qui va suivre

que cet angle est *droit*, parce que cette supposition est celle qui conduit aux constructions les plus simples. Pour nous conformer à l'usage, et afin d'abrégier le discours, nous regarderons l'un des deux plans de projection comme *horizontal*, et l'autre comme *vertical*, quoiqu'ils puissent avoir des positions quelconques. L'intersection des deux plans de projection se nommera *ligne de terre*.

232. Lorsque nous dirons qu'un point est donné, ou qu'une ligne est donnée, nous entendrons que les projections de ce point, ou de cette ligne, sont données. Lorsqu'un plan sera donné, ses traces seront censées connues. Quand nous proposerons de déterminer un point, ou une droite, ou un plan, il s'agira de construire les projections du point, ou celles de la droite, ou les traces du plan. Les projections et les traces prendront le nom du plan de projection dans lequel elles se trouveront. Ainsi, les projections et les traces situées dans le plan horizontal, seront les *projections* et les *traces horizontales*.

Suivant qu'une droite sera parallèle au plan horizontal de projection, ou qu'elle sera perpendiculaire à ce plan, nous dirons que cette ligne est *horizontale*, ou qu'elle est *verticale*. On dit, dans le même sens, qu'un *plan* est *horizontal*, ou qu'il est *vertical*, suivant qu'il est parallèle ou perpendiculaire au plan horizontal de projection.

233. De ce que les plans de projection sont supposés rectangulaires, il s'ensuit que :

1°. Si un point ou une ligne est dans l'un des plans de projection, sa projection sur l'autre plan sera sur la ligne de terre.

2°. Si une ligne est située dans un plan parallèle à l'un des plans de projection, la projection de cette ligne sur l'autre plan sera une parallèle à la ligne de terre.

3°. Si un plan est perpendiculaire à l'un des deux plans de projection, sa trace sur l'autre plan sera perpendiculaire à la ligne de terre. Cela se déduit du principe du n° 185.

Par exemple, un plan vertical a pour trace verticale une perpendiculaire à la ligne de terre.

4°. *Les perpendiculaires abaissées d'un même point sur les deux plans de projection, et les perpendiculaires menées des deux projections de ce point, sur la ligne de terre, forment un rectangle ; de telle sorte que les distances de la ligne de terre aux deux projections d'un point, sont respectivement égales aux distances de ce point aux deux plans de projection.*

Par conséquent, lorsqu'on connaît les projections d'un point, on peut avoir immédiatement ses distances aux deux plans de projection.

234. Les conventions précédentes suffisent pour faire pressentir la possibilité de résoudre les problèmes qui se rapportent aux trois dimensions de l'étendue, par des constructions renfermées dans deux plans qui se coupent, et que nous sommes convenus de prendre *rectangulaires* entre eux. Il paraît donc nécessaire, au premier aperçu, d'employer deux feuilles pour y représenter dans leur vraie grandeur la projection horizontale et la projection verticale. Mais afin de ramener les constructions au plus grand degré de simplicité, et de réunir les deux projections sur un seul dessin, on fait tourner le plan vertical  $xyu$  (*fig. 191*) autour de la ligne de terre  $xy$ , de manière à l'appliquer sur le prolongement du plan horizontal  $xyz$ , en  $xyu'$ ; alors toutes les lignes seront réellement tracées sur le plan horizontal; mais il faudra perpétuellement concevoir, par la pensée, les projections verticales remises à leur place, au moyen d'un quart de révolution autour de la ligne de terre. Quant aux points situés hors des plans de projection, ils ne paraîtront pas dans les figures; mais il sera facile de se représenter la véritable position de ces points à l'aide de leurs projections.

Par exemple,  $d$  et  $d'$  (*fig. 192*) étant les projections d'un point  $D$  de l'espace, qui n'est pas indiqué dans la figure, on concevra que le plan vertical, qu'on suppose déjà rabattu sur le plan horizontal, fait un quart de révolution autour de  $xy$ ; les plans de projection étant alors perpendiculaires l'un à l'autre, si par les points  $d$ ,  $d'$ , on conçoit des perpendiculaires au plan horizontal et au plan vertical, la rencontre de ces perpendiculaires

sera le point D de l'espace, dont les projections sont  $d$  et  $d'$ . On désignera quelquefois ce point par  $(d, d')$ .

235. (fig. 191). *Les deux projections d'un point sont situées sur une perpendiculaire à la ligne de terre  $xy$ .*

En effet, concevez que les plans de projection  $xyz$ ,  $xyu$ , étant dans leur position primitive, c'est-à-dire perpendiculaires l'un à l'autre, les projections d'un point soient  $d$  et  $d'$ ; les perpendiculaires menées des points  $d, d'$ , sur  $xy$ , passeront par un même point  $p$  de  $xy$  (n° 225); si le plan vertical tourne autour de  $xy$ , pour venir s'appliquer sur le plan horizontal, la droite  $pd'$  ne cessera pas d'être perpendiculaire à  $xy$ ; et quand le plan vertical  $xu$  coïncidera avec le plan horizontal,  $d'$  tombera sur un point  $d''$  du plan horizontal; la droite  $pd''$  sera égale à  $pd'$ , et elle tombera sur le prolongement de la perpendiculaire  $dp$  à  $xy$ .

236. *Lorsque deux lignes se coupent en un point, la droite qui joint les points d'intersection des projections de ces lignes, est perpendiculaire à la ligne de terre.*

En effet, les projections d'un point étant toujours situées sur une perpendiculaire à la ligne de terre (n° 235), et les projections du point d'intersection de deux lignes ne pouvant être que les intersections des projections de ces lignes, quand deux lignes se coupent en un point, la droite qui joint les intersections des projections des lignes données, doit être perpendiculaire à la ligne de terre.

237. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de la droite sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan.* En effet, soient  $dp$  et  $d'p'$  (fig. 212), les projections d'une droite DP (située dans l'espace) perpendiculaire au plan  $cac'$ , dont les traces sont  $ac, ac'$ . Si l'on mène par la projection horizontale  $dp$  un plan  $dpp'$  perpendiculaire au plan horizontal, ce plan sera perpendiculaire au plan  $cac'$ , car il passe par une perpendiculaire DP au plan  $cac'$  (n° 180); le plan  $dpp'$  est donc perpendiculaire à la fois au plan horizontal et au plan  $cac'$ ; il est donc perpendiculaire à l'intersection  $ac$  de ces deux plans. Or, cette intersection est la trace horizontale du plan  $cac'$ ;

le plan  $dpp'$  est donc perpendiculaire à la trace  $ac$ ; la projection horizontale  $dp$ , située dans le plan  $dpp'$ , est donc perpendiculaire à la trace horizontale  $ac$  (n° 127).

On démontrera d'une manière semblable que la projection verticale  $d'p'$  de la perpendiculaire au plan  $cac'$ , est perpendiculaire à la trace verticale  $ac'$  du plan  $cac'$ .

## § II. *Épures relatives aux Problèmes sur la ligne droite et le plan.*

238. Nous allons exposer maintenant les *solutions des problèmes relatifs à la ligne droite et au plan*, qui entrent, comme élémens nécessaires, dans toutes les questions de Géométrie où il faut considérer les trois dimensions de l'étendue.

Pour rendre les explications plus faciles à suivre, nous établirons les conventions suivantes : les grandes lettres A, B, C, etc., indiqueront des points de l'espace; ces lettres ne paraîtront pas dans les figures : les petites lettres correspondantes  $a, b, c$ , etc., employées sans accens, serviront à désigner les projections horizontales des points A, B, C, etc.; ces petites lettres, affectées d'un accent, c'est-à-dire  $a', b', c'$ , etc., indiqueront les projections verticales des mêmes points A, B, C, etc.

Nous désignerons souvent un point de l'espace par ses deux projections; ainsi, lorsque nous parlerons d'un point  $(a, a')$ , il s'agira du point A, dont les projections sont  $a$  et  $a'$ .

La *ligne de terre* sera toujours désignée par  $xy$ .

On nomme *ÉPURE*, la feuille qui contient le tracé de toutes les constructions d'un problème. Dans toutes les épures, les *données* et les *résultats* seront figurés par un *trait continu*; les lignes de construction le seront par un *trait discontinu* ou ligne *ponctué*, que l'on fera varier selon l'objet de ces constructions.

239. 1<sup>er</sup> PROBLÈME (fig. 193). *Les projections de deux points étant données, construire les projections de la droite qui passe par ces deux points.*

Les projections de cette droite passent nécessairement par les projections des points donnés. Tirant donc une droite par les projections horizontales des points donnés, et menant une autre droite par les projections verticales des mêmes points, ces deux droites seront les projections demandées.

Par exemple,  $a$  et  $a'$  étant les projections d'un point  $A$  de l'espace, et  $b$ ,  $b'$  étant celles d'un autre point  $B$ , les droites  $ab$ ,  $a'b'$ , seront les projections de la droite  $AB$  qui passe par les points  $A$ ,  $B$ .

240. 2<sup>e</sup> PROBLÈME (*fig. 193*). *Connaissant les projections des extrémités d'une droite, construire la grandeur de cette droite.*

Soient,  $a$ ,  $a'$ , les projections d'une des extrémités  $A$  de la droite, et  $b$ ,  $b'$ , les projections de l'autre extrémité  $B$ ; les droites  $aa'$ ,  $bb'$ , seront perpendiculaires à la ligne de terre  $xy$  (n° 235); et si l'on conçoit qu'on élève en  $a$  et  $b$  des verticales respectivement égales à  $aa'$ ,  $bb'$ , les extrémités de ces verticales seront les points  $A$ ,  $B$ , dont il s'agit de construire la distance (n° 233). Imaginons dans l'espace, par le point  $A$ , une droite parallèle à  $ab$ , et terminée à la verticale  $bB$ ; on aura ainsi un triangle rectangle, dont la base est une horizontale parallèle et égale à la projection  $ab$ , dont la hauteur est égale à la différence des verticales  $aA$ ,  $bB$ , et dont l'hypoténuse est la distance cherchée de  $A$  à  $B$ . Mais, si l'on mène par  $a'$  une parallèle  $h'k'$  à la ligne de terre,  $b'h'$  sera égale à la différence des verticales  $aA$ ,  $bB$ , et l'angle  $h'$  sera droit; donc, si l'on prend sur  $h'k'$  une longueur  $h'i = ba$ , et qu'on tire l'hypoténuse  $ib'$ , cette hypoténuse sera la distance demandée de  $A$  à  $B$ .

Telle est la construction dont on fait usage pour trouver la vraie longueur d'une droite dont on connaît les projections.

En effectuant sur le plan horizontal une construction analogue, on vérifiera l'exactitude de la première construction.

On peut encore expliquer cette construction comme il suit: Les verticales élevées en  $a$  et  $b$  forment avec  $ab$  et  $AB$  un trapèze dont le plan est vertical; faites tourner ce trapèze autour de la verticale  $bB$ , jusqu'à ce qu'il soit devenu parallèle au plan ver-



tical de projection ; la base  $ba$  ne sortira pas du plan horizontal, et viendra prendre, sans changer de grandeur, la situation  $bi$ , parallèle à la ligne de terre; la droite  $BA$ , dans sa nouvelle position, sera parallèle au plan vertical et s'y projettera en  $b'i'$  dans sa vraie grandeur. Or, le point  $B$  n'a pas changé de position ; donc il est toujours projeté en  $b'$ . Le point  $A$  a changé, mais il est resté à la même distance du plan horizontal, et par conséquent sa projection verticale est située sur la parallèle  $a'k'$  à  $yx$ ; d'ailleurs la projection  $ba$  est devenue  $bi$  égale à  $ba$ , et parallèle à  $yx$ ; donc le point  $A$  dans sa nouvelle position a sa projection horizontale en  $i$ ; donc, en menant  $ii'$  perpendiculaire à  $xy$ , le point  $i'$  sera la projection verticale du point  $A$ , dans la position où  $AB$  est devenu parallèle au plan vertical ; donc la droite  $i'b'$  sera la vraie longueur de  $AB$ .

On pourrait encore trouver la longueur  $AB$ , en faisant tourner autour de  $ab$  le trapèze  $abBA$ , pour le rabattre sur le plan horizontal, comme on le voit en  $abnm$  ; ou bien, en faisant tourner le trapèze  $a'b'BA$  autour de  $a'b'$ , pour le rabattre sur le plan vertical, comme on le voit en  $a'b'n'm'$ .

On a,  $i'h' = ab$ ,  $am = aa'$ ,  $a'm' = aa$ ,  $bn = cb'$ ,  $b'n' = cb$ .

Si les constructions précédentes ont été bien exécutées, les droites  $i'b'$ ,  $mn$ ,  $m'n'$ , seront de même longueur; car chacune d'elles mesure la vraie distance du point  $A$  au point  $B$ .

241. 3<sup>e</sup> PROBLÈME (*fig. 194*). *Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.*

Soient,  $d, d'$ , les projections du point donné, et  $ab, a'b'$ , les projections de la ligne donnée. La ligne cherchée passant par le point donné, les projections de cette ligne doivent passer par les projections  $d, d'$ , du point donné; mais les projections de deux parallèles sont parallèles (n<sup>o</sup> 223); on construira donc les projections de la droite demandée, en menant, par les projections  $d, d'$ , du point donné, des parallèles,  $de, d'e'$ , aux projections,  $ab, a'b'$ , de la ligne donnée.

242. 4<sup>e</sup> PROBLÈME (*fig. 195*). *Connaissant les traces de deux plans, construire l'intersection de ces plans.*

Soient,  $aa'$ ,  $aa'$ , les traces du premier plan, et  $bb'$ ,  $bb'$ , celles du second plan; les points,  $c$ ,  $c'$ , où ces traces se coupent, appartiennent à l'intersection des deux plans; cette intersection est la droite, située dans l'espace, qui joint le point  $c$  au point  $c'$  (elle n'est pas indiquée dans la figure), et il s'agit d'en construire les projections.

La projection horizontale du point  $c'$  étant le pied  $s$  de la perpendiculaire menée du point  $c'$  sur  $xy$ , on voit que  $s$  est un des points de la projection horizontale de l'intersection des plans donnés; mais  $c$  est un point de cette même projection; la droite  $cs$  est donc la projection horizontale de l'intersection demandée.

Par une raison semblable, si l'on mène la perpendiculaire  $cr$  à  $xy$ , le pied  $r$  de cette perpendiculaire sera la projection verticale du point  $c$  de l'intersection des plans donnés; mais  $c'$  appartient à cette projection; la droite  $c'r$  sera donc la projection verticale de l'intersection des deux plans,  $aa'$ ,  $bb'$ .

L'intersection des plans donnés est donc déterminée, puisqu'on connaît ses deux projections.

Nous allons examiner quelques cas particuliers qui pourraient embarrasser.

1°. (fig. 196). Quand les traces horizontales,  $aa$ ,  $bb$ , des plans donnés,  $aa'$ ,  $bb'$ , sont parallèles, l'intersection de ces plans est parallèle aux traces  $aa$ ,  $bb$ ; car la parallèle à ces traces, menée par le point  $c'$  de l'intersection des deux plans, doit se trouver dans chacun de ces plans (n° 123).

Par conséquent, la projection horizontale de l'intersection des plans sera parallèle aux traces  $aa$ ,  $bb$ , et sa projection verticale sera parallèle à la ligne de terre. D'ailleurs, le point  $c'$  où les traces verticales se coupent, appartient à l'intersection des deux plans; donc, si l'on abaisse  $c's$  perpendiculaire sur  $xy$ , et que l'on mène  $sd$  parallèle à  $aa$ , et  $c'd'$  parallèle à  $yx$ , ces deux parallèles seront les projections de l'intersection des plans  $aa'$ ,  $bb'$ .

2°. (fig. 197). Quand les traces de chaque plan sont parallèles à la ligne de terre  $xy$ , les deux plans sont parallèles à  $xy$ , leur intersection est aussi parallèle à  $xy$ ; et, pour la déterminer, il faut employer un troisième plan de projection, qu'on

choisira, pour plus de simplicité, perpendiculaire à  $xy$ . Les traces  $yu, yu'$ , de ce nouveau plan, seront perpendiculaires à  $xy$ . Cherchons les traces, sur ce plan, des deux plans donnés. Pour cela, observons que les points  $a, a'$ , où  $yu$  et  $yu'$  sont rencontrés par les traces  $aa, a'a'$ , du premier plan donné, appartiennent à l'intersection de ce premier plan avec le plan auxiliaire; supposons qu'on fasse tourner ce plan auxiliaire autour de  $yu$  pour le rabattre sur le plan horizontal, le point  $a$  ne changera pas de situation, la ligne  $yu'$  se rabattra sur la perpendiculaire  $yu''$  à  $yu$ , et le point  $a'$  décrira un arc de cercle autour du centre  $y$ , pour se porter en  $a''$ , à une distance  $ya'' = ya'$ ; donc la droite, qui, dans l'espace, unissait les points  $a, a'$ , se rabat suivant la droite  $aa''$ ; et  $aa''$  sera sur le plan auxiliaire de projection, la trace du premier plan donné.

Les traces de l'autre plan donné étant les parallèles  $cb, cb'$ , à  $xy$ , on déterminera de même la trace  $cc''$  de ce plan sur le plan auxiliaire rabattu en  $uyu''$ .

L'intersection  $c$  des droites  $aa'', cc''$ , sera donc le rabattement d'un point de l'intersection des plans donnés. Donc, si le plan  $uyu''$  fait un quart de révolution autour de  $yu$  pour reprendre sa position verticale primitive, le pied  $d$  de la perpendiculaire  $cd$  à  $xy$  sera la projection horizontale d'un des points de l'intersection des plans donnés, et l'on obtiendra la projection verticale  $d'$  de ce point en prenant  $yd' = dc$ . Les parallèles,  $de, d'e'$ , à  $yx$ , seront les projections demandées de l'intersection des plans donnés.

3°. (*fig. 198*). Enfin, si les traces des deux plans donnés sur chaque plan de projection sont parallèles entre elles, sans l'être à la ligne de terre, les plans donnés seront parallèles.

Par exemple, si les traces  $aa, aa'$ , sont respectivement parallèles aux traces  $cb, cb'$ , les plans donnés  $aaa', bcb'$ , seront parallèles (n° 159); il n'y aura donc pas lieu à chercher leur intersection.

243. 5° PROBLÈME (*fig. 199*). Déterminer le point  $O$  d'intersection de trois plans donnés.

Les plans donnés, combinés deux à deux, se coupent suivant

trois droites qui passent par le point cherché. On construira donc les projections de ces trois droites. Si les constructions sont faites avec exactitude, les trois projections horizontales devront passer par un même point  $o$ , qui sera la projection horizontale du point  $O$  cherché; les trois projections verticales passeront aussi par un même point  $o'$  qui sera la projection verticale du point  $O$ ; et la droite  $oo'$ , menée par les projections du point  $O$ , devra être perpendiculaire à la ligne de terre (n° 235). Ces constructions sont représentées sur la *fig. 199*.

244. 6° PROBLÈME (*fig. 200*). *Construire les points où une droite rencontre les plans de projection.*

Supposons que les projections  $bc$ ,  $b'c'$ , de la droite donnée, coupent la ligne de terre aux points,  $s$ ,  $t$ .

Pour trouver le point où la ligne donnée rencontre le plan horizontal, on observera que ce point doit avoir sa projection verticale sur la ligne de terre  $xy$  (n° 233, 1°); cette projection doit aussi se trouver sur  $b'c'$ , car  $b'c'$  contient les projections verticales de tous les points de la droite donnée; donc le point  $t$ , où  $b'c'$  rencontre  $xy$ , est la projection verticale du point de rencontre de la droite donnée avec le plan horizontal; conduisant donc, par le point  $t$ , une perpendiculaire  $tk$  au plan vertical, cette perpendiculaire contiendra le point de rencontre demandé; mais ce point doit aussi se trouver sur la projection horizontale  $bc$  de la ligne donnée; l'intersection  $h$  des droites  $bc$ ,  $tk$ , est donc le point de rencontre de la ligne donnée avec le plan horizontal.

On verra de même que si, par le point  $s$ , on mène, dans le plan vertical, une perpendiculaire  $sk'$  sur  $xy$ , l'intersection  $v'$ , de  $sk'$  avec la projection verticale  $b'c'$ , sera le point de rencontre de la droite donnée avec le plan vertical.

En général : *Pour construire le point de rencontre d'une droite avec le plan horizontal, déterminez le point d'intersection de la projection verticale de la droite donnée avec la ligne de terre; par ce point menez dans le plan horizontal une perpendiculaire à la ligne de terre; la rencontre de cette perpendiculaire avec la projection horizontale de la ligne donnée sera*

*le point demandé. Pour trouver le point où une droite rencontre le plan vertical, déterminez l'intersection de la projection horizontale de la ligne donnée avec la ligne de terre ; par ce point menez dans le plan vertical une perpendiculaire à la ligne de terre ; la rencontre de cette perpendiculaire avec la projection verticale de la ligne donnée , sera le point demandé.*

Lorsqu'on change la position de la droite donnée, les points  $h$ ,  $v'$ , où elle perce les plans de projection, changent aussi. Nous nous bornerons à faire remarquer les cas indiqués par les figures 200, 201, 202 et 203.

Dans la figure 200, la droite rencontre le plan horizontal en  $h$ , devant le plan vertical, et le plan vertical en  $v'$ , au-dessus du plan horizontal. Dans la figure 201, le point  $h$  est derrière le plan vertical, et le point  $v'$  au-dessus du plan horizontal. Dans la figure 202, le point  $h$  est devant le plan vertical, et le point  $v'$  au-dessous du plan horizontal. Enfin, dans la figure 203, le point  $h$  est derrière le plan vertical, et le point  $v'$  au-dessous du plan horizontal.

245. 7<sup>e</sup> PROBLÈME (fig. 204). *Faire passer un plan par trois points donnés.*

Les trois droites qui joignent les points donnés, étant situées dans le plan cherché, ces droites rencontreront les plans de projection en des points qui appartiendront aux traces du plan demandé; on déterminera ainsi trois points de chacune de ces traces; les trois points de chaque trace devront être en ligne droite, et ces traces devront se couper en un même point de la ligne de terre; ce qui donnera trois vérifications.

Cette construction ne peut offrir aucune difficulté, car elle se réduit à trouver les points où des droites données rencontrent les plans de projection, et l'on sait trouver ces points (n° 244).

Supposez que,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , soient les projections horizontales des trois points donnés, et que  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , soient les projections verticales des mêmes points. Les projections des droites menées par les points donnés, passeront par les projections de ces points; les projections horizontales de ces droites sont donc,  $ab$ ,  $ac$ ,  $bc$ ;

et les projections verticales des mêmes droites sont,  $a'b'$ ,  $a'c'$ ,  $b'c'$ . Si l'on cherche les points où ces droites rencontrent les plans de projection, on trouvera qu'elles rencontrent le plan horizontal en trois points,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ , et le plan vertical en trois points,  $d'$ ,  $e'$ ,  $f'$ .

Quand la construction sera bien exécutée, la droite indéfinie menée par les points  $e$ ,  $f$ , passera par  $d$ , et la droite indéfinie menée par  $e'$ ,  $f'$ , passera par  $d'$ ; ces deux droites devront concourir en un même point  $t$  de  $xy$ , et elles seront les traces du plan qui passe par les trois points donnés.

Discutons les différens cas qui peuvent se présenter.

1°. Quand les droites qui joignent les points donnés ne sont parallèles à aucun des plans de projection, chacune d'elles rencontre les deux plans de projection, et l'on trouve trois points de vérification.

2°. Lorsqu'une seule des droites est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple, elle ne rencontre plus ce plan; il ne reste donc que deux points de vérification. Mais, cependant, il existe une troisième vérification; car on déduit des principes des nos 144 et 136, que la trace horizontale du plan cherché doit être parallèle à la projection horizontale de la droite qui est supposée parallèle au plan horizontal.

3°. Quand une des droites est parallèle aux deux plans de projection, elle ne rencontre plus ces plans; on ne connaît que les deux points de chaque trace, donnés par les rencontres des deux autres droites avec les plans de projection; alors la droite parallèle aux deux plans de projection est parallèle à la ligne de terre  $xy$  (n° 147); donc le plan cherché est lui-même parallèle à  $xy$ ; et par conséquent ses deux traces doivent être parallèles à  $xy$  (n° 230).

4°. Si deux droites étaient parallèles à l'un des plans de projection, au plan vertical par exemple, le plan de ces droites, qui est celui des trois points donnés, serait parallèle au plan vertical (n° 160); la trace horizontale du plan cherché serait donc parallèle à la ligne de terre (n° 230), et les projections horizontales des trois points donnés seraient sur cette trace, qui suffit alors pour déterminer le plan cherché.

5°. Enfin, si les trois points donnés étaient en ligne droite, cette droite rencontrerait chaque plan de projection en un seul point; on ne connaîtrait qu'un point de chaque trace du plan demandé; la position de ce plan serait donc indéterminée.

246. 8° PROBLÈME (*fig. 205*). *Conduire un plan par deux droites qui se coupent, ou qui sont parallèles.*

Cherchez les points,  $a, b$ , où ces droites percent le plan horizontal; cherchez aussi les points  $a', b'$ , où elles percent le plan vertical; les droites,  $ab, a'b'$ , seront les traces du plan demandé.

247. 9° PROBLÈME. *Trouver le point où une droite donnée rencontre un plan connu.*

Si, par la projection horizontale de la ligne donnée, on mène un plan vertical, ce plan contiendra le point cherché; mais ce point doit aussi se trouver dans le plan donné; l'intersection de ces deux plans et la droite donnée, contiendront donc le point cherché; ce point sera donc déterminé par l'intersection de ces deux lignes.

Par exemple, pour construire le point de rencontre de la droite dont les projections sont  $dr$  et  $d's$  (*fig. 206*), avec le plan  $aaa'$ , on conduira un plan vertical  $drv$ , par la projection horizontale  $dr$ ; ce plan contiendra la ligne donnée; sa trace horizontale sera  $dr$ , et sa trace verticale sera une droite  $rv$  perpendiculaire à  $xy$  (n° 233, 3°). Menant  $bb'$  perpendiculaire à  $xy$ , la droite  $b'v$  sera la projection verticale de l'intersection des plans  $aaa', drv$  (n° 242). Or, la projection verticale du point cherché doit se trouver sur la droite  $b'v$  et sur la projection verticale  $d's$  de la ligne donnée; la projection verticale du point demandé est donc l'intersection  $f'$  des lignes  $b'v, d's$ .

Mais, la projection horizontale de ce point doit se trouver sur la perpendiculaire  $f'k$  à  $xy$  (n° 235), et sur la projection horizontale  $dr$  de la droite donnée; l'intersection  $f$  des lignes  $f'k, dr$ , est donc la projection horizontale du point demandé.

Pour construire directement la projection horizontale  $f$  du point cherché, on mène par la projection verticale  $d's$  de la ligne donnée, un plan  $d'sh$  perpendiculaire au plan vertical; le plan

$d'sh$  contient le point cherché; mais ce point est dans le plan donné; la projection horizontale  $ch$  de l'intersection des plans  $d'sh$ ,  $aaa'$ , contient donc la projection horizontale du point cherché. Mais, cette projection doit aussi se trouver sur la projection horizontale  $dr$  de la ligne donnée; l'intersection  $f$ , des droites  $ch$ ,  $dr$ , sera donc la projection horizontale du point cherché.

Quand les constructions précédentes auront été faites avec exactitude, les trois droites,  $f'k$ ,  $ch$ ,  $dr$ , passeront par un même point  $f$ .

Lorsque la droite donnée est verticale, sa projection horizontale se réduit à un point  $d$  (*fig. 207*), qui est la projection horizontale du point cherché, et la projection verticale de cette droite est la perpendiculaire  $dsd'$  à  $xy$ . Pour construire la projection verticale du point cherché; on mène un plan vertical  $brv$  par la projection horizontale  $d$  de la droite donnée; ce plan reste indéterminé, car sa trace horizontale  $br$  n'est assujettie qu'à passer par  $d$ ; sa trace verticale est une perpendiculaire  $rv$  à  $xy$ . Si l'on tire la perpendiculaire  $bb'$  à  $xy$ , la droite  $vb'$  sera la projection verticale de l'intersection des plans  $aaa'$ ,  $brv$ ; et le point  $f'$  de rencontre des lignes  $vb'$ ,  $da'$ , sera la projection verticale du point où la verticale donnée rencontre le plan  $aaa'$ .

La trace horizontale du plan vertical mené par la verticale donnée, n'étant assujettie qu'à passer par  $d$ , nous allons supposer successivement que cette trace est parallèle à  $xy$  et à  $aa$ .

Si l'on prend la trace  $db$  (*fig. 208*) parallèle à  $xy$ , le plan vertical qui contient la ligne donnée sera parallèle au plan vertical de projection; son intersection avec le plan  $aaa'$  sera parallèle à  $aa'$  (n° 153), et la projection verticale de cette intersection sera aussi parallèle à  $aa'$  (n° 223). Or, le point  $b$  où se coupent les traces horizontales,  $db$ ,  $aa$ , appartient à cette intersection; donc si l'on mène  $bb'$  perpendiculaire à  $xy$ , et ensuite  $b'e'$  parallèle à  $aa'$ , cette parallèle sera la projection verticale de l'intersection du plan  $aaa'$  avec le plan vertical mené par  $db$ ; la ligne  $b'e'$ , par sa rencontre avec  $da'$ , détermine la projection verticale  $f'$  du point où la verticale donnée rencontre le plan donné  $aaa'$ .

Si l'on prend la trace  $db$  (*fig. 209*) parallèle à  $aa$ , le plan qui



contient la verticale donnée aura pour trace verticale une perpendiculaire  $be'$  à  $xy$ ; et le point  $b'$  où cette trace rencontre  $aa'$ , appartiendra à l'intersection des deux plans  $aaa'$ ,  $dbe'$ ; or, cette intersection est parallèle à  $aa$  (page 131, 1<sup>re</sup>); donc elle est horizontale; donc sa projection verticale sera une parallèle  $b'c'$  à la ligne de terre. Le point  $f'$ , où  $b'c'$  rencontre  $dd'$ , est la projection verticale du point cherché.

**248. 10<sup>e</sup> PROBLÈME** (*fig. 207*). *Connaissant les traces d'un plan, et l'une des projections d'un point situé dans ce plan, trouver l'autre projection de ce point.*

Par exemple, soit  $d$  la projection horizontale d'un point du plan  $aaa'$ ; en menant une verticale par le point  $d$ , la projection verticale demandée sera celle du point de rencontre de cette verticale avec le plan  $aaa'$ . Cette question rentre donc dans celle du n<sup>o</sup> 247.

**249. 11<sup>e</sup> PROBLÈME.** *Par un point donné, conduire un plan parallèle à un plan donné.*

Tout plan conduit par le point donné, coupant le plan donné et le plan cherché suivant deux parallèles (n<sup>o</sup> 153), si l'on tire par ce point une parallèle à une droite quelconque située dans le plan donné, cette parallèle sera dans le plan cherché; construisant donc les points où elle rencontre les plans de projection, on aura un point de chaque trace du plan cherché; les parallèles aux traces du plan donné, menées par ces deux points, seront les traces du plan demandé (n<sup>o</sup> 153).

Soient donc,  $d, d'$ , (*fig. 210*), les projections du point donné, et  $aa, aa'$ , les traces du plan donné; prenez un point  $e$  sur la trace horizontale  $aa$ , et un point  $e'$  sur la trace verticale  $aa'$ ; menez les perpendiculaires  $ep, e'q$ , à la ligne de terre  $xy$ ; les droites  $eq, e'p$ , seront les projections d'une droite  $ee'$  de l'espace située dans le plan donné  $aaa'$ , car cette droite a deux points,  $e, e'$ , qui sont dans ce plan; menez par  $d$  et  $d'$  des parallèles  $fr, f's$ , à  $eq$  et  $e'p$ , ces parallèles seront les projections d'une droite  $ff'$  parallèle à  $ee'$ , et qui sera dans le plan cherché; les points  $f, f'$ , où cette parallèle rencontre les plans de projection, appartiendront donc aux

traces du plan cherché; et comme ces traces doivent être parallèles aux traces  $aa$ ,  $a'a$ , du plan donné, on les obtiendra en tirant par  $f$  et  $f'$  des droites  $bn$ ,  $b'n'$ , respectivement parallèles à  $aa$  et  $a'a$ .

Quand le plan donné n'est pas parallèle à la ligne de terre  $xy$ , il coupe cette ligne en un point  $a$ , et les traces du plan cherché doivent concourir en un même point  $c$  de  $xy$ .

Lorsque le plan donné est parallèle à un des plans de projection, au plan vertical, par exemple, le plan cherché est aussi parallèle au plan vertical; chacun de ces plans n'ayant plus qu'une seule trace, qui est une parallèle à  $xy$  située dans le plan horizontal, la construction précédente est en défaut; mais on obtient directement la trace horizontale qui détermine le plan cherché, en conduisant par la projection horizontale du point donné, une parallèle à  $xy$ ; cette trace horizontale détermine entièrement le plan cherché.

REMARQUE. Quand le plan donné  $aa'a'$  (*fig. 211*) n'est pas parallèle à la ligne de terre  $xy$ , on peut simplifier la construction indiquée, car la trace horizontale  $aa$  étant dans le plan donné, si l'on conçoit qu'on mène par le point donné ( $d$ ,  $d'$ ), une parallèle  $H$  à  $aa$ , cette parallèle sera dans le plan cherché, et de plus elle sera parallèle au plan horizontal; donc la projection horizontale de  $H$  est la parallèle  $dr$  à  $aa$  menée par le point  $d$ , et la projection verticale de  $H$  est la parallèle  $d'p'$  à  $xy$ . Les droites  $dr$ ,  $d'p'$ , étant les projections d'une ligne  $H$  située dans le plan cherché, si l'on détermine le point  $s'$  où cette ligne rencontre le plan vertical (ce qui s'exécute en tirant la perpendiculaire  $rs'$  à  $xy$ ), ce point appartiendra à la trace verticale du plan cherché. On obtiendra donc les deux traces du plan demandé, en tirant par  $s'$  la parallèle  $b'c$  à  $a'a$ , et en menant ensuite la parallèle  $cb$  à  $aa$ ; les droites  $b'b'$ ,  $cb$ , seront les traces du plan cherché.

Pour obtenir une vérification, on conçoit que l'on mène par le point donné ( $d$ ,  $d'$ ) une parallèle  $V$  à la trace verticale  $a'a$  du plan donné; cette parallèle est dans le plan cherché, et de plus elle est parallèle au plan vertical de projection; donc la projection verticale de la parallèle  $V$  à  $a'a$  est une parallèle  $d'r'$  à  $a'a$ , et sa projection horizontale est la parallèle  $dp$  à  $xy$ . On cons-

truit le point  $s$  où la droite  $V$  rencontre le plan horizontal, en menant la perpendiculaire  $r'n$  à  $xy$ ; l'intersection  $s$  des droites  $cp$ ,  $r'n$ , doit se trouver sur la trace horizontale  $Cb$  du plan cherché.

250. 12° PROBLÈME (fig. 212). *Un point et un plan étant donnés, on propose de mener une perpendiculaire du point donné sur le plan donné; de trouver le pied de la perpendiculaire, et de construire la longueur de cette perpendiculaire.*

Soient,  $d, d'$ , les projections du point donné  $D$ , et  $ac, ac'$ , les traces du plan donné; les projections de la perpendiculaire demandée doivent passer par les points  $d, d'$  (n° 219), et l'on a vu (n° 237) que ces projections sont perpendiculaires aux traces  $ac, ac'$ . On obtiendra donc les projections de la droite cherchée, en tirant par  $d$  et  $d'$  des perpendiculaires  $dn, d's$ , aux traces  $ac, ac'$ . On en déduira facilement les projections  $p, p'$ , du point  $P$  de rencontre de la perpendiculaire  $DP$  avec le plan  $cac'$  (n° 247), et ensuite le procédé du n° 240 fournira le moyen de trouver la distance  $DP$  du point donné ( $d, d'$ ) au pied ( $p, p'$ ) de la perpendiculaire  $DP$  au plan  $cac'$ .

251. 13° PROBLÈME (fig. 213). *Par un point donné ( $d, d'$ ), mener un plan perpendiculaire à une droite donnée ( $ab, a'b'$ ).*

Le plan cherché devant être perpendiculaire à la droite donnée, les traces de ce plan sont respectivement perpendiculaires aux projections de la ligne donnée (n° 237); mais le point donné appartient au plan cherché. On connaît donc un point du plan cherché, et les directions de ses traces. Il suffit donc de trouver un point de l'une des traces du plan cherché. A cet effet, on conçoit que l'on mène par le point donné  $D$ , une parallèle  $H$  à la trace horizontale du plan cherché; cette parallèle est située dans le plan cherché, et de plus elle est parallèle au plan horizontal; donc sa projection horizontale est parallèle à la trace horizontale du plan cherché, et par conséquent perpendiculaire à la projection horizontale de la droite donnée; mais elle passe par  $d$ ; on obtiendra donc la projection horizontale de l'horizontale  $H$  située dans le plan cherché, en tirant par  $d$  une perpendiculaire  $dr$  à  $ab$ . La projection verticale de  $H$  est une

parallèle  $d'p'$  à  $xy$ . Les droites  $dr$ ,  $d'p'$ , étant les projections d'une ligne  $H$  située dans le plan cherché, si l'on détermine le point  $s'$  où cette droite rencontre le plan vertical (ce qui s'exécute en tirant  $rs'$  perpendiculaire à  $xy$ ), ce point appartiendra à la trace verticale du plan cherché. On obtiendra donc les traces du plan demandé, en tirant par  $s'$  une perpendiculaire  $c'a$  à  $a'b'$ , et en conduisant la perpendiculaire  $ac$  à  $ab$ .

Pour obtenir une vérification, on conçoit que l'on mène par le point donné ( $d$ ,  $d'$ ) une parallèle  $V$  à la trace verticale du plan cherché; cette parallèle est dans le plan cherché, et de plus elle est parallèle au plan vertical de projection; donc la projection verticale de  $V$  est parallèle à la trace verticale du plan cherché, et par conséquent perpendiculaire à la projection verticale  $a'b'$  de la droite donnée; la projection horizontale de la parallèle  $V$  au plan vertical est parallèle à  $xy$ . On obtiendra donc les projections de la droite  $V$ , située dans le plan cherché, en menant  $d'r'$  perpendiculaire à  $a'b'$ , et en conduisant la parallèle  $dp$  à  $xy$ ; le point  $s$  où la droite  $V$  rencontre le plan horizontal, devra se trouver sur la trace  $ac$  (déjà déterminée) du plan cherché.

252. 14<sup>e</sup> PROBLÈME (*fig. 214*). *Un point et une droite étant donnés, on propose de mener par le point donné une perpendiculaire à la ligne donnée, de déterminer le pied de cette perpendiculaire, et de trouver la distance du point donné à la droite donnée.*

Par le point donné  $D$ , dont les projections sont  $d$ ,  $d'$ , menez un plan  $cac'$ , perpendiculaire à la droite donnée ( $ab$ ,  $a'b'$ ) (n° 251); déterminez les projections,  $p$ ,  $p'$ , du point  $P$  où le plan  $cac'$  rencontre la droite donnée (n° 247); la droite  $DP$  sera la perpendiculaire demandée; et par conséquent, les droites  $dp$ ,  $d'p'$ , seront les projections de cette perpendiculaire. Vous déduirez ensuite de ces projections, la longueur de la perpendiculaire abaissée du point donné sur la droite donnée (n° 240).

253. 15<sup>e</sup> PROBLÈME. *Par une droite donnée, conduire un plan perpendiculaire à un plan donné.*

Si d'un point quelconque de la droite donnée, on mène une

perpendiculaire au plan donné, cette perpendiculaire et la droite donnée seront dans le plan cherché (n° 188); les points où ces droites rencontreront les plans de projection, appartiendront donc aux traces du plan cherché. On déterminera donc facilement deux points de chaque trace. Il y aura un point de vérification, car les traces devront se couper sur un même point de la ligne de terre. La solution de ce problème ne dépend donc que des constructions des n°s 250 et 244.

### § III. Angles formés par des droites et des plans.

254. 16° PROBLÈME (fig. 215). *Construire l'angle formé par deux droites dont les projections sont données.*

Si, par un point quelconque, on mène des parallèles aux lignes données, l'angle formé par ces parallèles mesurera l'angle des lignes données (n° 167). Soient donc,  $a, a'$ , les projections d'un point quelconque,  $ab, a'b'$ , les projections de la parallèle à la première droite, et  $ac, a'c'$ , les projections de la parallèle à la seconde droite; si vous déterminez les points  $b, c$ , où ces parallèles rencontrent le plan horizontal,  $a$  et  $a'$  seront les projections du sommet d'un triangle, dont la base sera  $bc$ ; et, dans ce triangle, l'angle opposé à la base  $bc$  sera l'angle demandé. Or, la base  $bc$  est dans sa vraie grandeur; il suffit donc de chercher les longueurs des deux autres côtés. Les projections de l'un de ces côtés étant  $ab, a'b'$ , si vous prenez  $pq = ab$ , l'hypoténuse  $a'q$  sera la longueur du côté projeté en  $ab$ ; et en prenant  $pr = ac$ , l'hypoténuse  $a'r$  sera la longueur du côté projeté en  $ac$ . Par conséquent, si, des points  $b, c$ , comme centres, vous décrivez des arcs avec les rayons  $a'q, a'r$ , et si du point  $A$ , où ces arcs se coupent, vous menez les droites  $Ab, Ac$ , l'angle  $bAc$  sera égal à l'angle formé par les droites données.

On peut construire le triangle  $bAc$  par une méthode plus élégante. En effet, la base  $bc$  étant connue, il suffit de trouver la position et la grandeur de la perpendiculaire  $Ah$ , menée du sommet  $A$  sur la base. Or,  $a$  est la projection horizontale du sommet  $A$ ; par conséquent, si, du sommet du triangle, on

tirait une perpendiculaire sur le plan horizontal, le pied de cette perpendiculaire serait  $a$ ; menant  $ah$  perpendiculaire à la base  $bc$ , qui est dans le plan horizontal, la droite que l'on tirerait du sommet  $A$  du triangle au point  $h$ , serait perpendiculaire à  $bc$  (n° 133); le point  $h$ , ainsi déterminé, est donc le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet  $A$  du triangle sur la base  $bc$ ;  $ah$  est donc la projection horizontale de cette perpendiculaire. Or, le point  $h$  est dans le plan horizontal, et la distance du sommet  $A$  au plan horizontal est  $a'p$ ; prenant donc  $ph' = ah$ , et tirant l'hypoténuse  $a'h'$ , cette hypoténuse sera la hauteur du triangle cherché (n° 240). Par conséquent, si l'on porte sur la perpendiculaire  $hak$  à  $bc$ , une partie  $hA = a'h'$ , et si l'on tire les droites  $Ab$ ,  $Ac$ , le triangle demandé sera  $Abc$ , et  $bAc$  sera l'angle formé par les droites données.

En exécutant une construction analogue par rapport au plan vertical, on devra retrouver le même angle  $bAc$ .

Cette construction suppose que les deux droites données reprennent l'un des plans de projection.

REMARQUE, (fig. 216). Quand l'une des droites est parallèle à un des plans de projection, au plan horizontal par exemple, on mène par un point quelconque  $b$  du plan horizontal, des parallèles aux droites données; l'une de ces parallèles est la droite  $bc$  située dans le plan horizontal, et en tirant la perpendiculaire  $bb'$  à  $xy$ , les projections de l'autre parallèle sont des droites  $ba$ ,  $b'a'$ ; l'angle formé par cette seconde parallèle avec  $bc$  est égal à l'angle cherché. Pour construire cet angle, tirez une perpendiculaire quelconque  $aa'$  sur  $xy$ , les points  $a$ ,  $a'$ , seront les projections d'un point  $A$  de la seconde parallèle; et si l'on conçoit une perpendiculaire abaissée de ce point sur  $bc$ , la projection horizontale de cette perpendiculaire sera la perpendiculaire  $ah$  à  $bc$ ; de sorte qu'en prenant  $ph' = ha$ , l'hypoténuse  $a'h'$  sera la longueur de la perpendiculaire projetée en  $ah$ . Prenant donc sur la perpendiculaire  $hak$  à  $bc$ , une partie  $hA = h'a'$ , et joignant  $Ab$ , l'angle  $Abc$  sera celui des droites données.

Si les deux droites données étaient parallèles à un des plans

de projection, au plan horizontal par exemple, l'angle formé par les projections horizontales de ces droites serait égal à l'angle des lignes données.

255. 17<sup>e</sup> PROBLÈME (*fig. 217*). *Construire l'angle formé dans l'espace par les traces d'un plan donné.*

Ce problème n'étant qu'un cas particulier du précédent, on obtiendra l'angle cherché par une construction analogue à celle qui vient d'être indiquée dans la remarque ci-dessus. Soient  $ac$ ,  $ac'$ , les traces du plan donné, on concevra que, par un point quelconque  $a'$  de la trace verticale  $ac'$ , on mène dans l'espace une perpendiculaire sur la trace horizontale  $ac$ ; on trouvera la projection horizontale de cette perpendiculaire en tirant la perpendiculaire  $a'p$  à  $xy$ , et la perpendiculaire  $pa$  sur  $ac$ ; la droite  $pa$  sera la projection demandée; de sorte qu'en prenant  $pq = pa$ , l'hypoténuse  $a'q$  sera la vraie grandeur de la perpendiculaire abaissée de  $a'$  sur  $ac$ ; or, cette perpendiculaire forme avec  $aa'$  et  $aa$  un triangle rectangle, dans lequel l'angle opposé à la perpendiculaire  $a'a$  est précisément l'angle demandé; prenant donc sur le prolongement  $ak$  de  $pa$  une partie  $as = a'q$ , et joignant  $as$ , l'angle  $as$  sera la vraie grandeur de l'angle que les traces  $ac$ ,  $ac'$ , font entre elles dans l'espace.

On parvient au même résultat en prenant deux points quelconques  $b'$ ,  $b$ , sur les traces  $ac'$ ,  $ac$ , et en construisant le triangle dont les deux côtés qui comprennent l'angle cherché sont  $ab$ ,  $ab'$ ; le troisième côté de ce triangle étant la droite menée dans l'espace du point  $b$  au point  $b'$ , on trouvera ce côté en tirant la perpendiculaire  $b'r$  à  $xy$ , et en prenant  $rn = rb$ ;  $b'n$  sera la vraie grandeur du côté cherché; par conséquent, si l'on décrit des arcs dans le plan horizontal, des points  $a$ ,  $b$ , comme centres, avec les rayons  $ab'$ ,  $b'n$ , ces arcs se couperont en un point  $t$ , et en tirant la droite  $at$ , l'angle  $bat$  sera égal à l'angle formé par les traces  $ac$ ,  $ac'$ .

Si les constructions précédentes ont été faites avec exactitude, les points  $a$ ,  $t$ ,  $s$ , seront en ligne droite.

256. 18<sup>e</sup> PROBLÈME (*fig. 218*). *Par le point d'intersection*

*de deux droites données, mener dans leur plan une droite qui divise l'angle qu'elles forment en deux parties égales.*

Supposez que les projections de la première droite soient  $ab$ ,  $a'b'$ , et que celles de la seconde soient  $ac$ ,  $a'c'$ ; construisez, comme dans le n° 254, l'angle  $bAc$  formé par ces droites. Du point  $A$  menez une droite  $Ae$ , qui divise l'angle  $bAc$  en deux parties égales; l'intersection  $e$ , des droites  $Ae$ ,  $bc$ , sera le point où la ligne demandée rencontre le plan horizontal; la projection verticale de ce point sera le pied  $e'$  de la perpendiculaire menée du point  $e$  sur  $xy$ ;  $e$  et  $e'$  seront donc les projections d'un point de la droite cherchée, mais les projections de cette droite doivent passer par les projections,  $a$ ,  $a'$ , de l'intersection des droites données; les droites,  $ae$ ,  $a'e'$ , sont donc les projections de la ligne demandée.

Si la ligne cherchée devait diviser l'angle des lignes données en deux parties qui fussent dans un rapport donné, la construction ne différerait de la précédente qu'en ce que la droite  $Ae$  diviserait l'angle  $bAc$  dans le rapport donné.

**257. 19° PROBLÈME (fig. 219).** *Réduire un angle à l'horizon; c'est-à-dire, connaissant les angles  $V$ ,  $V'$ , que deux droites,  $l$ ,  $l'$ , inclinées à l'horizon, font avec la verticale, et l'angle  $\theta$  que ces droites font entre elles, construire l'angle  $\theta'$  formé par les projections horizontales des côtés de l'angle  $\theta$ .*

Par un point quelconque  $s$  du plan vertical de projection, tirez dans ce plan une droite  $sq$  qui forme l'angle  $V$  avec la verticale  $sp$ ; la projection horizontale de  $sq$  ou de  $l$ , sera la partie  $pq$  de la ligne de terre  $xy$ ; il ne s'agira plus que de trouver la projection horizontale de la deuxième droite  $l'$ , qui passe par  $s$ , et qui fait l'angle  $V'$  avec la verticale  $sp$ , et l'angle  $\theta$  avec  $sq$ . La droite  $l'$  passant par  $s$ , sa projection horizontale passe par  $p$ . Il suffit donc de chercher le point  $n$  de rencontre de la droite  $l'$  avec le plan horizontal, car  $pn$  sera la projection horizontale de  $l'$ , et comme  $pq$  est la projection horizontale de  $l$ , l'angle  $npq$  sera égal à l'angle  $\theta'$  demandé.

Le point  $n$  serait facile à déterminer, si l'on connaissait ses

*Géométrie.*



distances aux points  $p, q$ ; car en décrivant des arcs de  $p$  et  $q$  comme centres avec des rayons égaux à ces distances, ces arcs se couperaient au point  $n$  demandé. Or, en concevant la droite  $sn$  qui joint dans l'espace le point  $s$  au point  $n$ , les distances inconnues  $pn, qn$ , sont les côtés de deux triangles  $spn, sqn$ , qu'il est facile de construire au moyen des angles connus  $V', \theta$ , que la droite  $sn$  forme avec les droites connues  $sp, sq$ . En effet:

1°. La droite  $sn$  faisant l'angle  $V'$  avec la verticale  $sp$ , si l'on tire dans le plan vertical une ligne  $sr$  sous l'angle  $psr = V'$ , l'hypoténuse  $sr$  sera la vraie longueur de la droite  $sn$  qui joint le point  $s$  au point cherché  $n$ , et  $pr$  sera égal à la distance de  $p$  à  $n$ . Le point  $n$  sera donc sur l'arc  $rda$  décrit de  $p$  comme centre avec le rayon connu  $pr$ .

2°. Dans le triangle  $sqn$  (situé dans l'espace), on connaît le côté  $sq$ ; la vraie grandeur du côté  $sn$  est  $sr$ , et l'angle formé par ces deux côtés est  $\theta$ ; par conséquent, si l'on tire dans le plan vertical la droite  $sc$  sous l'angle  $qsc = \theta$ ; et si l'on prend  $st = sr$ , la droite  $qt$  sera la vraie grandeur du côté  $qn$ ; le point cherché  $n$  doit donc se trouver sur l'arc  $tmb$  décrit de  $q$  comme centre avec le rayon connu  $qt$ . Mais d'après (1°), ce point doit aussi se trouver sur l'arc  $rda$  décrit de  $p$  comme centre avec le rayon  $pr$ ; l'intersection  $n$  de ces arcs sera donc le point  $n$  demandé; et en tirant  $pn$ , l'angle  $npq$  sera l'angle  $nsq$  réduit à l'horizon.

Les angles plans  $psq = V, psn = V', nsq = \theta$ , forment un angle solide triple en  $s$ , et l'angle  $npq = \theta'$ , est la mesure de l'angle dièdre formé par les plans verticaux  $psq, psn$ , qui contiennent les deux côtés de l'angle  $\theta$ .

REMARQUE. Ce problème est fort utile dans le *levé des plans*; car, sur la carte d'un pays, c'est la projection horizontale des angles que l'on construit, et non les angles eux-mêmes.

258. 20° PROBLÈME (*fig. 220*). Construire l'angle formé par une droite avec un plan.

Si, par un point quelconque de la droite, on mène une perpendiculaire au plan, l'angle formé par ces deux droites sera le complément de l'angle demandé (n° 168). La question est

donc ramenée à chercher l'angle de deux droites (n° 254).

Soient,  $ab$ ,  $a'b'$ , les projections d'une droite; pour trouver l'angle formé par cette droite, avec le plan  $dad'$ , on mènera par les projections  $a$ ,  $a'$ , d'un point quelconque  $A$  de cette droite, des perpendiculaires  $ac$ ,  $a'c'$ , sur les traces  $ad$ ,  $ad'$ , du plan; ces lignes seront les projections d'une perpendiculaire au plan  $dad'$  (n° 250); et si l'on construit l'angle  $bAc$  formé par cette perpendiculaire avec la droite donnée, cet angle sera le complément de l'angle demandé. Conduisant donc  $Ah$  perpendiculaire sur  $Ac$ , l'angle  $bAh$  sera l'angle demandé.

259. 21<sup>e</sup> PROBLÈME (*fig. 221*). *Déterminer les angles formés par un plan donné, avec les plans de projection.*

Supposez que  $tat'$  soit le plan donné. Pour construire l'angle formé par ce plan avec le plan horizontal, menez arbitrairement un plan vertical  $asa'$  perpendiculaire à la trace horizontale  $at$ ;  $as$  sera perpendiculaire à  $at$ ,  $sa'$  sera perpendiculaire à  $xy$ , et la droite qui joint dans l'espace les points  $a$ ,  $a'$ , sera perpendiculaire à  $at$ ; donc l'angle que fait cette droite avec  $as$  est égal à l'angle du plan donné avec le plan horizontal.

Pour construire cet angle, on fait tourner le plan  $asa'$  autour de  $sa'$ , pour l'appliquer sur le plan vertical de projection; le point  $a$  décrit dans le plan horizontal l'arc  $anp$ , dont le centre est  $s$ ; la droite qui unissait les points,  $a'$ ,  $a$ , prend la position  $a'p$ , et  $a'ps$  est égal à l'angle cherché.

Pour construire l'angle formé par le plan  $tat'$  avec le plan vertical, menez  $sb'$  perpendiculaire à  $at'$ , et  $sc$  perpendiculaire à  $xy$ ; de  $s$  comme centre, avec le rayon  $sb'$ , décrivez l'arc  $b'n'q$ ; tirez  $cq$ ;  $cqs$  sera égal à l'angle demandé.

260. 22<sup>e</sup> PROBLÈME (*fig. 222*). *Déterminer l'angle formé par deux plans donnés.*

Si, par un point quelconque, on menait deux perpendiculaires à ces plans, l'angle formé par ces droites serait facile à construire (n° 254); et le *supplément* de cet angle mesurerait l'inclinaison des plans donnés (n° 196).

Mais on peut résoudre directement ce problème. En effet,

soient  $ta't'$  et  $d\zeta d'$  les plans donnés; construisez la projection horizontale  $ab$  de leur intersection (n° 242); cette intersection sera la droite  $l$  qui joint dans l'espace les points  $a, a'$ ; par un point quelconque  $c$  de  $ab$ , concevez un plan perpendiculaire à  $l$ , sa trace horizontale sera la perpendiculaire  $gch$  à  $ab$ ; il coupera  $l$  en un point  $S$  de l'espace, ses intersections avec les plans donnés seront des perpendiculaires  $Sg, Sh$  à  $l$ , et dans le triangle  $Sgh$ , l'angle opposé à la base  $gh$  sera l'angle cherché. La question est donc réduite à construire dans sa vraie grandeur le triangle  $Sgh$ . Pour y parvenir, on cherche la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet inconnu  $S$  sur la base  $gh$ ; le pied de cette perpendiculaire sera  $c$ , car le point  $S$  étant sur l'intersection  $l$  dont la projection est  $ab$ , la perpendiculaire abaissée de  $S$  sur le plan horizontal, rencontre ce plan en un point inconnu  $s$  de  $ab$ , et  $sc$  étant perpendiculaire à  $gh$ , la droite  $Sc$  est perpendiculaire à  $gh$  (n° 133). Pour trouver la hauteur  $Sc$  du triangle  $Sgh$ , on fait tourner le plan vertical  $a'ba$  autour de la verticale  $a'b$ , jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur le plan vertical de projection; les points,  $c, a$ , décrivent des arcs  $czq, afp$ , dont le centre est  $b$ ; l'intersection  $l$ , qui joint  $a'$  et  $a$ , vient se placer sur la droite  $a'p$ ; la hauteur  $cS$  du triangle  $Sgh$  est perpendiculaire à l'intersection  $l$  des plans donnés, car elle se trouve dans le plan  $Sgh$  perpendiculaire à  $l$ ; la vraie longueur de  $cS$  est donc la perpendiculaire  $qr$ , menée de  $q$  sur  $a'p$ .

Par conséquent, si l'on prend sur la droite  $ca$  une partie  $cn = qr$ , et si l'on tire les droites  $ng, nh$ , le triangle  $ngh$  sera la vraie grandeur du triangle  $Sgh$ , et  $gnh$  mesurera l'angle des plans donnés,  $ta't', d\zeta d'$ .

REMARQUE. Si l'on tire  $rm$  perpendiculaire à  $xy$ , et si l'on conçoit que le plan  $a'bp$  tourne autour de  $a'b$  pour venir prendre la position  $a'ba$ , les points,  $p, m, q$ , décriront dans le plan horizontal des arcs  $pfa, m\delta s, qzc$ , dont le centre est  $b$ ; la droite  $a'p$  s'appliquera sur l'intersection  $l$  des plans  $ta't', d\zeta d'$ , le point  $r$  viendra en  $S$ , la perpendiculaire  $qr$  à  $pa'$  coïncidera avec la perpendiculaire  $cS$  menée de  $c$  sur l'intersection  $l$ , et  $s$  sera la projection horizontale de  $S$ .

Les droites  $sg, sh$ , étant les projections horizontales des côtés  $Sg, Sh$ , du triangle  $Sgh$ , si l'on prend  $mk = sg, m\gamma = sh$ , les hypoténuses,  $rk, r\gamma$ , seront les vraies grandeurs des côtés  $Sg, Sh$ , du triangle  $Sgh$  (n° 240); et par conséquent, si la construction a été bien faite, les droites  $rk, r\gamma$ , seront respectivement égales aux côtés,  $ng, nh$ .

261. 23<sup>e</sup> PROBLÈME (fig. 223). Construire un plan qui passe par l'intersection de deux plans donnés, et qui divise l'angle qu'ils forment en deux parties égales.

Si les deux plans donnés sont  $ta't', d\hat{c}d'$ , le plan cherché P, devant passer par l'intersection des plans donnés, les traces du plan P passeront par les points,  $a, a'$ , où cette intersection rencontre les plans de projection. On connaît donc un point de chacune des traces du plan cherché. Or, ces traces doivent passer par un même point de la ligne de terre; il suffit donc de trouver un autre point de l'une des traces du plan cherché. Pour déterminer un point de la trace horizontale, on construit d'abord, sur le plan horizontal, l'angle  $gnh$  formé par les plans donnés (n° 260). Si le plan cherché P était mené, le plan conduit par  $gh$  perpendiculairement à l'intersection  $l$  des plans donnés, couperait le plan P suivant une droite qui diviserait en deux parties égales l'angle  $gnh$  des plans donnés; par conséquent, pour trouver le point où cette droite rencontre le plan horizontal, il suffit de tirer par  $n$  une droite qui divise l'angle connu  $gnh$  en deux parties égales; le point  $k$  où cette droite rencontre  $gh$  est le point cherché. Mais, cette droite est dans le plan cherché;  $k$  est donc un point de la trace horizontale de ce plan; or,  $a$  est un point de la même trace; la droite  $ak\gamma$  est donc la trace horizontale du plan demandé. Les points,  $\gamma, a'$ , appartenant à la trace verticale de ce plan, cette trace est la droite  $\chi a'$ .

REMARQUE. Si les angles formés par le plan cherché avec les deux plans donnés, devaient être dans un rapport donné, il suffirait de mener la droite  $nk$  de manière qu'elle divisât l'angle connu  $gnh$  dans le rapport donné. Le reste de la construction serait le même.

### § IV. Plus courte distance de deux droites.

262. 24° PROBLÈME (*fig. 224*). Construire la plus courte distance entre deux droites,  $l, l'$ , qui ne sont pas situées dans un même plan.

Il suffit d'appliquer la méthode des projections à la solution qui a été indiquée dans le n° 166. Soient donc,  $ab, a'b'$ , les projections de  $l$ , et  $cd, c'd'$ , celles de  $l'$ ; on mène par un point quelconque  $(o, o')$  de  $l$ , une parallèle  $L'$  à  $l'$ ; soient  $gv, g'v'$ , les projections de  $L'$ . On fait passer un plan  $P$  par les droites  $l, L'$ ; pour construire les traces de ce plan, on détermine les points  $b, g, a', v'$ , où les lignes  $l, L'$ , rencontrent les plans de projection, les droites  $bg\alpha, v'a'\alpha$ , sont les traces du plan  $P$ . On obtiendrait la longueur de la plus courte distance demandée, en abaissant une perpendiculaire  $P'$  au plan  $P$ , par un point quelconque de  $l'$ ; mais afin de simplifier, on mène la perpendiculaire  $P'$  par le point  $(c, c')$  où la droite  $l'$  rencontre le plan horizontal; de cette manière, les projections de la perpendiculaire  $P'$  sont les lignes  $ce, c'e'$ , respectivement perpendiculaires aux traces  $ab, \alpha v'$ , du plan  $P$ ; et la construction du n° 247 sert à déterminer le point  $(h, h')$  où la perpendiculaire  $P'$  rencontre le plan  $P$ . Par le point  $(h, h')$  on tire une parallèle à la droite  $l'$ , et l'on construit le point  $(k, k')$  où cette parallèle rencontre la ligne  $l$ ; enfin, par le point  $(k, k')$  on mène une parallèle à la perpendiculaire  $P'$  au plan  $P$ ; les projections de cette parallèle s'obtiennent en tirant des parallèles  $ki, k'i'$ , aux projections  $ec, e'c'$ , de la perpendiculaire  $P'$ ; les droites  $ki, k'i'$ , sont les projections de la plus courte distance demandée, et l'on construit sa vraie grandeur  $k'p$ , comme il a été indiqué (n° 240).

Quand la construction a été faite avec exactitude, la droite  $ii'$  est perpendiculaire sur  $xy$  (° 235).

REMARQUE. Si les deux droites données,  $l, l'$ , étaient parallèles en menant par un point quelconque de  $l$ , une parallèle  $L'$  à  $l'$ , les droites  $l, L'$ , se confondraient; le plan  $P$  conduit par les deux lignes  $l, L'$ , resterait donc indéterminé, et la construction in-

diquée serait en défaut. La plus courte distance deviendrait alors la perpendiculaire menée sur l'une des droites données, par un point quelconque de l'autre droite.

### § V. De la Sphère inscrite et circonscrite.

**263. 25° PROBLÈME.** *Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire.*

Le centre de la sphère demandée doit être à égales distances des quatre faces de la pyramide; ce point sera donc à l'intersection des plans qui divisent en deux parties égales les angles dièdres de ces faces (n° 205). Il suffit d'employer trois de ces plans; mais il ne faut pas qu'ils passent par les arêtes, qui partent d'un même sommet, car ils se couperaient, non pas en un point, mais suivant une ligne droite.

Voici donc les constructions qu'il faut effectuer. Les quatre sommets de la pyramide étant connus, on détermine les plans qui passent par ces points pris trois à trois (n° 245); les arêtes de la pyramide sont les droites qui joignent les sommets; par ces droites, on mène des plans qui divisent en deux parties égales les angles formés par les faces de la pyramide (n° 261); on cherche le point d'intersection de ces plans (n° 243); ce qui détermine le centre de la sphère demandée. Construisant la longueur de la perpendiculaire menée du centre de la sphère sur l'une quelconque des faces de la pyramide, cette longueur sera le rayon de la sphère inscrite demandée.

Pour simplifier cette construction, prenez la base ABC (fig. 225) de la pyramide pour le plan horizontal de projection. Supposez que  $d$  et  $d'$  représentent les projections du sommet D de la pyramide; tirez les perpendiculaires  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , à  $xy$ ; les droites  $d'A'$ ,  $d'B'$ ,  $d'C'$ , seront les projections verticales des arêtes qui aboutissent au sommet D. Supposez le problème résolu, et désignez par O (\*) le centre de la sphère inscrite, vous

---

(\*) On doit comprendre qu'il s'agit ici de lignes situées dans l'espace, et qui ne sont pas représentées sur la figure.

pourrez considérer le point  $O$  comme le sommet d'une seconde pyramide  $OABC$  dont la base est  $ABC$ ; la section de cette pyramide par un plan horizontal quelconque  $x'y'$ , sera un triangle dont les côtés seront respectivement parallèles aux côtés de la base  $ABC$ ; les projections horizontales de ces côtés seront donc des parallèles  $ab, ac, bc$ , à  $AB, AC, BC$ . Si ces projections étaient connues, le problème serait résolu, car les droites  $Aa, Bb, Cc$ , prolongées, étant les projections horizontales des arêtes de la pyramide  $OABC$ , se couperaient en un point  $o$ , qui serait la projection horizontale du centre  $O$  de la sphère inscrite; conduisant des perpendiculaires  $aa', bb', cc'$ , à  $xy$ , les points  $a', b', c'$ , où ces perpendiculaires rencontreraient la droite  $x'y'$ , seraient les projections verticales des points  $a, b, c$ ; les droites  $A'a', B'b', C'c'$ , prolongées, seraient les projections verticales des arêtes de la pyramide  $OABC$ ; ces trois projections se couperaient donc en un point  $o'$ , qui serait la projection verticale du centre  $O$  de la sphère inscrite.

La question est donc réduite à construire le triangle  $abc$ .

Pour déterminer le côté  $bc$ , on mènera par le sommet  $D$  un plan vertical perpendiculaire à  $BC$ ; ce plan coupera les plans  $ABC, OBC, DBC$ , suivant trois droites perpendiculaires à l'intersection  $BC$  des trois plans; la première, sera la perpendiculaire  $dE$  à  $BC$ ; la deuxième, qui passera par  $E$ , rencontrera le plan horizontal  $x'y'$  en un certain point  $N$  que nous allons déterminer, et dont la projection horizontale  $n$  appartiendra au côté  $bc$  demandé; enfin, la troisième droite sera  $DE$ . Les angles formés par les droites  $DE, NE$ , avec  $dE$ , mesureront les inclinaisons des plans  $DBC, OBC$ , sur le plan horizontal. L'intersection  $DE$  sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont  $Dd = d'p$  et  $dE$ . Prenant  $pE' = dE$ , et joignant  $d'E'$ , l'angle  $d'E'p$  mesurera l'angle que le plan  $DBC$  forme avec le plan horizontal. Tirant donc une droite  $E'L'$  qui divise l'angle  $d'E'p$  en deux parties égales, et concevant que l'on transporte le triangle  $d'pE'$  de manière que les côtés  $d'p, pE'$ , coïncident avec les côtés  $Dd, dE$ , les droites  $d'E', L'E'$ , deviendront les intersections du plan vertical  $DdE$  avec les faces  $DBC, OBC$ ; de sorte

que pour trouver la projection horizontale  $n$  du point  $N$ , où la droite  $E'L'$  (ainsi transportée) rencontre le plan horizontal  $x'y'$ , il suffit de tirer la perpendiculaire  $kk'$  à  $xy$ , et de prendre  $En = E'k'$ . Menant donc par le point  $n$  une parallèle  $bc$  à  $BC$ , cette parallèle sera la projection horizontale de l'intersection du plan  $x'y'$  avec la face  $OBC$  de la pyramide  $OABC$ .

On construira de la même manière les projections,  $ba$ ,  $ac$ , des intersections du plan  $x'y'$  avec les deux autres faces  $OAB$ ,  $OAC$ , de la pyramide  $OABC$ .

Le triangle  $abc$  étant construit, on obtiendra, comme on l'a expliqué, les projections,  $o$ ,  $o'$ , du centre  $O$  de la sphère inscrite; et si la construction est bien faite, la droite  $oo'$  devra être perpendiculaire à  $xy$  (n° 235).

Pour déterminer la longueur du rayon de la sphère inscrite dans la pyramide  $OABC$ , on observe que cette sphère est tangente au plan horizontal, et que, par conséquent, son rayon est égal en longueur à la perpendiculaire  $o'm$  abaissée de  $o'$  sur  $xy$ .

**264. 26° PROBLÈME (fig. 226). Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire.**

La surface de la sphère devant passer par les quatre sommets de la pyramide, le centre de la sphère cherchée doit être à égales distances de ces quatre sommets; il sera donc déterminé par l'intersection de trois plans perpendiculaires sur les milieux de trois arêtes (n° 204). On doit seulement éviter de prendre trois arêtes situées dans une même face, car alors les trois plans perpendiculaires se couperaient suivant une ligne droite perpendiculaire au plan de ces arêtes.

Les constructions indiquées sont d'ailleurs faciles à exécuter.

En effet, les projections des arêtes étant données, les points milieux de ces projections seront les projections des milieux des arêtes; on pourra construire les traces des plans qui passent par ces milieux, et qui sont perpendiculaires aux arêtes (n° 251); on en déduira les projections du point d'intersection de ces plans (n° 243). Ces projections seront celles du centre de la sphère demandée; et si l'on construit dans sa vraie grandeur la dis-



tance de ce point à l'un quelconque des sommets de la pyramide, on aura le rayon de la *sphère circonscrite* à la pyramide. Le problème sera donc complètement résolu.

La construction devient plus simple lorsqu'on peut *déposer des plans de projection*. Dans ce cas, prenez pour plan horizontal de projection celui qui passe par trois sommets  $A, B, C$  (*fig. 226*) de la pyramide; choisissez pour plan vertical de projection un plan perpendiculaire à la base  $ABC$  de la pyramide, et parallèle à la droite  $AD$  qui joint le point  $A$  au quatrième sommet  $D$  de la pyramide; les projections,  $d, d'$ , du sommet  $D$  seront telles que la projection horizontale  $Ad'$  de la droite  $AD$  sera parallèle à la ligne de terre  $xy$ , et les points  $A, B, C$ , étant dans le plan horizontal, les projections verticales de ces points seront les pieds  $A', B', C'$ , des perpendiculaires menées de  $A, B, C$ , sur  $xy$ . Par les milieux  $m, n$ , des arêtes  $AC, AB$ , menez des plans perpendiculaires à ces arêtes; les traces horizontales de ces plans seront des perpendiculaires  $mg, nf$ , aux lignes  $AC, AB$ , et l'intersection de ces plans verticaux sera une verticale  $V$  qui passera par le point de rencontre  $s$  des droites  $mg, nf$ ; la projection horizontale de cette intersection sera donc  $s$ ; et en tirant  $sr'$  perpendiculaire sur  $xy$ , la projection verticale de  $V$  sera  $re'$ . Chaque point de la verticale  $V$  est également distant des trois sommets  $A, B, C$ , et il n'y a que les points de cette droite qui jouissent de cette propriété; le centre de la sphère demandée est donc sur cette verticale; ainsi le point  $s$  est la projection horizontale du centre  $S$  de la sphère inscrite demandée, et la projection verticale du centre  $S$  est sur la verticale  $re'$ . La droite, menée du point  $A$  au sommet  $D$ , étant parallèle au plan vertical, si, par le milieu de cette droite, on mène un plan  $P$  perpendiculaire à cette droite, ce plan sera perpendiculaire au plan vertical de projection; sa trace verticale  $g'k'$  sera perpendiculaire sur le milieu  $o'$  de la projection  $A'd'$  de  $AD$ , et l'intersection  $s'$  des droites  $re', g'k'$ , sera la projection verticale de l'intersection du plan  $P$  avec la verticale  $V$  qui passe par  $s$ . Ainsi, les points  $s, s'$ , sont les projections du centre  $S$  de la sphère de-

mandée. Les droites  $s'A'$ ,  $sA$ , étant les projections d'un rayon de la sphère, si l'on prend  $rp = sA$ , l'hypoténuse  $s'p$  sera la vraie grandeur du rayon de la sphère circonscrite.

Les projections de tous les points situés dans l'intérieur de la sphère circonscrite sont donc comprises dans les cercles décrits des points,  $s$ ,  $s'$ , comme centres, avec le rayon  $s'p$ .

## § VI. Construction de la Pyramide triangulaire.

265. Soit un angle solide triple  $S$  (fig. 227), formé par trois angles plans  $BSC$ ,  $CSA$ ,  $ASB$ ; désignons ces angles plans par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et représentons par  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , les angles dièdres respectivement opposés aux angles plans  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; l'angle dièdre  $\alpha$ , formé par les plans  $ASB$ ,  $ASC$ , sera opposé à l'angle plan  $BSC = a$ ; l'angle dièdre  $\zeta$ , formé par les plans  $BSA$ ,  $BSC$ , sera opposé à l'angle plan  $ASC = b$ ; et enfin l'angle dièdre  $\gamma$ , formé par les plans  $CSA$ ,  $CSB$ , sera opposé à l'angle plan  $ASB = c$ .

On emploie quelquefois le nom de *pyramide*, pour désigner l'angle solide triple; celui de *faces*, pour désigner les angles plans; et celui d'*angles*, pour désigner les angles dièdres.

266. Lorsqu'on connaît trois des six quantités,  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , la recherche des trois autres parties conduit à six questions différentes; car les trois parties données peuvent être une des six combinaisons suivantes :

1°. Les trois faces,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; 2°. deux faces,  $c$ ,  $b$ , et l'angle compris  $\alpha$ ; 3°. deux faces,  $c$ ,  $b$ , et l'angle  $\zeta$  opposé à l'une d'elles; 4°. les trois angles,  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ ; 5°. deux angles,  $\gamma$ ,  $\zeta$ , et la face adjacente,  $a$ ; 6°. deux angles  $\gamma$ ,  $\zeta$ , et la face  $b$  opposée à l'angle  $\zeta$ .

Les propriétés de la *pyramide supplémentaire* (n° 197) fournissent le moyen de ramener les trois derniers cas aux trois premiers; car les faces  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , de la pyramide supplémentaire sont les supplémens des angles  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , de la pyramide  $SABC$ , et les angles  $\alpha'$ ,  $\zeta'$ ,  $\gamma'$ , de la pyramide supplémentaire sont les supplémens des faces,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , de la pyramide  $SABC$ .

Par exemple, lorsqu'on saura construire une pyramide au

moyen de ses trois faces, il sera facile de résoudre le cas où les trois angles  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , seront donnés; car les supplémens  $200^\circ - \alpha$ ,  $200^\circ - \zeta$ ,  $200^\circ - \gamma$ , des trois angles donnés, seront les faces  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , de la pyramide supplémentaire; connaissant les faces  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , de la pyramide supplémentaire, on pourra construire les angles  $\alpha'$ ,  $\zeta'$ ,  $\gamma'$ , de cette pyramide; et ensuite, les supplémens  $200^\circ - \alpha'$ ,  $200^\circ - \zeta'$ ,  $200^\circ - \gamma'$ , des angles  $\alpha'$ ,  $\zeta'$ ,  $\gamma'$ , exprimeront les faces inconnues,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , de la pyramide demandée.

Il suffit donc de faire voir comment on peut construire une pyramide dans les trois premiers cas.

Nous exécuterons toutes les constructions sur le plan de l'angle donné  $ASB = c$ ; nous supposerons que ce plan est *horizontal*; quand nous parlerons du *plan horizontal*, il s'agira toujours du plan  $ASB$  sur lequel on trace l'épure. Selon qu'un arc de cercle sera situé dans un plan *horizontal* ou *vertical*, nous dirons que cet arc est *horizontal* ou *vertical*; toutes les lignes tracées sur le plan horizontal seront en lignes *pleines*. Les lignes, situées hors du plan horizontal, seront *ponctuées*; il ne faudra jamais les marquer sur les épreuves, elles ne serviront qu'à faciliter l'intelligence des démonstrations.

267. 27<sup>e</sup> PROBLÈME (*fig. 228*). *Connaissant les trois angles plans,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , qui forment un angle solide triple  $S$ , construire les trois angles dièdres,  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , formés par ces angles plans.*

Pour construire les angles dièdres  $\alpha$ ,  $\zeta$ , formés par les plans  $CSA$ ,  $CSB$ , avec le plan horizontal  $ASB$ , nous ferons tourner les plans  $CSA$ ,  $CSB$ , autour des arêtes  $SA$ ,  $SB$ , pour les rabattre sur le plan horizontal de la face  $ASB$ ; les vraies grandeurs des angles plans  $ASC$ ,  $BSC$ , étant  $b$  et  $a$ , on obtiendra le rabattement des faces  $ASC$ ,  $BSC$ , en tirant dans le plan horizontal des droites  $SD$ ,  $SE$ , sous les angles connus  $ASD = b$ ,  $BSE = a$ . Si l'on prend sur les lignes  $SD$ ,  $SE$ , deux points quelconques  $f$ ,  $f'$ , également distans de  $S$ , on pourra regarder ces deux points comme les rabattemens sur le plan horizontal d'un même point  $F$  de l'arête  $SC$ .

On obtiendra la projection horizontale du point  $F$ , en concevant que les faces  $ASD$ ,  $BSE$ , tournent autour des arêtes  $SA$ ,  $SB$ , pour reprendre leurs positions primitives  $ASC$ ,  $BSC$ . En effet, tirez des perpendiculaires  $fg$ ,  $f'g'$ , aux arêtes  $SA$ ,  $SB$ ; dans la rotation indiquée, les droites  $fg$ ,  $f'g'$ , restant constamment perpendiculaires aux arêtes  $SA$ ,  $SB$ , les points  $f$ ,  $f'$ , décriront des arcs de cercle situés dans des plans verticaux respectivement perpendiculaires aux arêtes  $SA$ ,  $SB$ ; les traces horizontales de ces plans étant les droites  $fd$ ,  $f'd'$ , menées dans le plan horizontal perpendiculairement aux arêtes  $SA$ ,  $SB$ , les projections horizontales des arcs décrits par  $f$  et  $f'$  sont sur les droites  $fd$ ,  $f'd'$ ; et par conséquent, lorsque les points  $f$ ,  $f'$ , seront réunis en  $F$ , leur projection horizontale sera l'intersection  $P$  des droites  $fd$ ,  $f'd'$ .

Cela posé : concevez qu'on tire dans l'espace les droites  $FP$ ,  $Fg$ ,  $Fg'$ ; les triangles  $FPg$ ,  $FPg'$ , seront rectangles en  $P$ .

Les droites  $Fg$ ,  $gP$ , situées dans les plans  $ASC$ ,  $ASB$ , étant perpendiculaires sur l'intersection  $AS$  de ces plans, l'angle  $FgP$  (pris dans sa vraie grandeur), est la mesure de l'angle dièdre  $\alpha$  formé par les plans  $ASC$ ,  $ASB$ .

Par une raison semblable, la vraie grandeur de l'angle  $Fg'P$  est la mesure de l'angle dièdre  $\beta$ , formé par les plans  $BSC$ ,  $BSA$ .

La détermination des angles inconnus  $\alpha$ ,  $\beta$ , se réduit donc à construire les triangles rectangles  $FPg$ ,  $FPg'$ , dans leur vraie grandeur.

Or, dans le triangle  $FPg$ , rectangle en  $P$ , on connaît le côté  $Pg$  de l'angle droit; et la vraie grandeur de l'hypoténuse  $gF$  est  $gf$ , car dans la rotation de la face  $ASD$  autour de  $AS$ , la distance de  $f$  à  $g$  reste constante. Si l'on-conçoit donc que le triangle  $FPg$  tourne autour du côté  $Pg$ , pour venir se rabattre sur le plan horizontal  $ASB$ , le sommet  $F$  viendra se placer sur la perpendiculaire  $PG$  à  $Pg$ , menée dans le plan horizontal; et la vraie grandeur de l'hypoténuse  $gF$  étant  $gf$ , l'arc horizontal décrit de  $g$  comme centre avec le rayon  $gf$ , coupera  $PG$  en un point  $k$ , qui sera le rabattement du sommet  $F$ ; de sorte qu'en tirant  $kg$ ,

l'angle  $kgP$  sera la vraie grandeur de l'angle dièdre  $\alpha$ , formé par les plans  $ASC$ ,  $ASB$ .

De même, pour trouver la vraie grandeur  $\zeta$  de l'angle dièdre formé par les plans  $BSC$ ,  $BSA$ , on tire dans le plan horizontal la perpendiculaire  $PG'$  à  $Pg'$ ; on décrit un arc horizontal de  $g'$  comme centre avec le rayon  $g'f'$ ; cet arc coupe  $PG'$  en un point  $k'$ , et en tirant  $k'g'$ , l'angle  $k'g'P$  est égal à l'angle  $\zeta$  demandé.

Pour construire l'angle  $\gamma$  formé par les plans  $CSA$ ,  $CSB$ , on observe que si l'on menait par le point  $F$  un plan perpendiculaire à l'intersection  $CS$  des plans  $CSA$ ,  $CSB$ , il couperait ces deux derniers plans suivant des droites  $Fp$ ,  $Fp'$ , perpendiculaires à  $SF$ , qui formeraient entre elles l'angle  $\gamma$  demandé (n° 174); et comme les droites  $Sf$ ,  $Sf'$ , sont les deux rabattements de  $SF$  sur le plan horizontal, on obtiendra les points inconnus,  $p$ ,  $p'$ , en tirant par  $f$  et  $f'$  des perpendiculaires aux arêtes  $SD$ ,  $SE$ ; ces perpendiculaires rencontreront  $SA$  et  $SB$ , aux points,  $p$ ,  $p'$ , demandés. Les droites  $fp$ ,  $f'p'$ , étant les vraies grandeurs des côtés  $Fp$ ,  $Fp'$ , du triangle  $Fpp'$ , dont la base  $pp'$  est dans le plan horizontal, si l'on conçoit que ce triangle tourne autour de sa base  $pp'$  pour venir se rabattre sur le plan horizontal, on obtiendra le rabattement  $F'$  du sommet  $F$ , en décrivant dans le plan horizontal, des arcs de  $p$  et  $p'$  comme centres, avec les rayons,  $pf$ ,  $p'f'$ ; ces arcs se couperont au point  $F'$  demandé; et en tirant les lignes  $F'p$ ,  $F'p'$ , le triangle  $F'pp'$ , sera le rabattement du triangle  $Fpp'$  sur le plan horizontal. L'angle  $pF'p'$  sera donc égal à l'angle  $\gamma$  demandé.

Quand la construction a été bien faite, 1°. les droites  $Pk$ ,  $Pk'$ , doivent être de même longueur, car chacune d'elles représente la vraie grandeur de la verticale  $FP$ .

2°. La droite  $SP$  étant la projection horizontale de la droite  $SF$  qui est perpendiculaire au plan  $Fpp'$ , le prolongement  $PZ$  de  $SP$  doit être perpendiculaire à la trace horizontale  $pp'$  du plan  $Fpp'$  (n° 237).

3°. La droite  $PZ$  étant perpendiculaire à la base  $pp'$  du triangle  $Fpp'$ , dont le sommet  $F$  est projeté en  $P$ , quand ce triangle

tourne autour de sa base  $pp'$ , pour venir se rabattre sur le plan horizontal, le sommet  $F$  se meut dans le plan vertical mené par  $FP$  perpendiculairement à  $pp'$ ; la trace horizontale de ce plan vertical étant la perpendiculaire  $PZ$  à  $pp'$ , le point  $F'$  où s'est rabattu le sommet  $F$ , doit se trouver sur la droite  $PZ$ .

268. D'après ce qui précède, pour construire l'épure qui sert à déterminer les angles inconnus,  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , sur le plan de la face opposée à l'angle  $\gamma$ , tirez dans ce plan (qui est supposé horizontal) des droites  $SD$ ,  $SA$ ,  $SB$ ,  $SE$  (*fig. 229*), qui forment entre elles les angles donnés  $DSA = b$ ,  $ASB = c$ ,  $BSE = a$ .

Par deux points  $f, f'$ , pris sur  $SD$  et  $SE$ , à égales distances de  $S$ , menez des perpendiculaires  $fd$ ,  $f'd'$ , aux droites  $SA$ ,  $SB$ , et de leur intersection  $P$ , tirez dans le plan horizontal des perpendiculaires  $PG$ ,  $PG'$ , aux lignes  $Pg$ ,  $Pg'$ ; décrivez des arcs horizontaux de  $g$  et  $g'$  comme centres, avec les rayons  $gf$ ,  $g'f'$ ; ces arcs couperont  $PG$  et  $PG'$ , en des points  $k$ ,  $k'$ ; et en tirant les hypoténuses  $kg$ ,  $k'g'$ , les angles  $kgP$ ,  $k'g'P$ , seront respectivement égaux aux angles cherchés  $\alpha$ ,  $\zeta$ .

Enfin, pour trouver l'angle  $\gamma$ , tirez des perpendiculaires  $fp$ ,  $f'p'$ , aux droites  $SD$ ,  $SE$ ; décrivez des arcs horizontaux de  $p$  et  $p'$  comme centres, avec les rayons  $pf$ ,  $p'f'$ ; ces arcs se couperont en un point  $F'$ ; conduisez les droites  $F'p$  et  $F'p'$ ; l'angle  $pF'p'$  sera égal à l'angle  $\gamma$  demandé.

Quand la construction a été bien exécutée, les droites  $Pk$ ,  $Pk'$ , sont de même longueur, la droite  $SPZ$  est perpendiculaire à la base  $pp'$  du triangle  $F'pp'$ , et le sommet  $F'$  est sur la droite  $SPZ$ .

Pour que cette construction réussisse, il faut que les arcs décrits de  $g$  et  $g'$  comme centres, avec les rayons  $gf$ ,  $g'f'$ , coupent les perpendiculaires  $PG$ ,  $PG'$ , aux droites  $Pg$ ,  $Pg'$ ; ce qui exige que ces rayons soient respectivement plus grands que  $gP$  et que  $g'P$ . Nous allons faire voir que ces deux conditions ont toujours lieu, quand les trois angles plans donnés peuvent former un angle solide triple.

269. Dans tout angle solide triple, le plus grand des trois angles plans est moindre que la somme des deux autres (n° 193).

et la somme de ces trois angles plans est moindre que quatre angles droits (n° 194). Nous allons faire voir que quand les trois angles plans donnés,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , satisfont à ces deux conditions, la pyramide existe toujours.

Soit  $ASB = c$  (fig 230) le plus grand des angles,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; on aura, par hypothèse,

$$(1) \dots c < a + b, \quad a + b + c < 400^\circ.$$

Tirez dans le plan horizontal  $ASB$ , des droites  $SD$ ,  $SE$ , sous les angles  $ASD = b$ ,  $BSE = a$ . Il s'agit de faire voir que si les angles  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , satisfaisant aux inégalités (1), on fait tourner les angles plans  $ASD$ ,  $BSE$ , autour des arêtes  $SA$ ,  $SB$ , les lignes  $SD$ ,  $SE$ , viendront se réunir en une seule droite  $SC$  située hors du plan de la face  $ASB$ .

Décrivez un arc de cercle dans le plan  $DSE$ , de  $S$  comme centre avec un rayon arbitraire; cet arc coupera les arêtes  $SD$ ,  $SA$ ,  $SB$ ,  $SE$ , en des points,  $f$ ,  $r$ ,  $t$ ,  $f'$ ; et comme les arcs  $fr$ ,  $rt$ ,  $tf'$ , peuvent servir de mesure aux angles plans,  $b$ ,  $c$ ,  $a$ , on aura

$$rf < rt, \quad tf' < rt, \quad rt < rf + tf', \quad fr + rt + tf' < 400^\circ.$$

Prenez l'arc  $rr' = rf$ , le point  $r'$  tombera sur l'arc  $rt$ , entre  $r$  et  $t$ ; la corde  $fgr'$  sera perpendiculaire au rayon  $Sr$ , et  $g$  sera le milieu de cette corde.

L'inégalité,  $rt < rf + tf'$ , revient à

$$rt < rr' + tf'; \text{ d'où } tf' > rt - rr', \quad tf' > tr'.$$

D'ailleurs,  $tf' < tr$ . Prenant donc l'arc  $tt' = tf'$ , le point  $t'$  tombera entre  $r'$  et  $r$ . La corde  $f't'$  perpendiculaire à  $SB$ , rencontrera donc la corde  $fr'$  en un point  $P$ , qui sera situé dans l'intérieur du cercle décrit de  $S$  comme centre avec le rayon  $Sf$ . On a donc,

$$gr' > gP, \quad g't' > g'P; \text{ ce qui revient à } gf > gP; \quad g'f' > g'P.$$

Cela posé : pour construire une pyramide avec les trois angles plans  $DSA = b$ ,  $ASB = c$ ,  $BSE = a$ , concevez qu'on mène par le point  $P$  une perpendiculaire indéfinie  $PV$  au plan hori-

zontal  $ASB$ , et faites tourner le plan  $fgS$  autour de l'arête  $SA$ , le point  $f$  décrira un arc de cercle situé dans le plan vertical  $VPg$ , perpendiculaire à  $SA$ . Je dis que cet arc coupera nécessairement la verticale  $PV$  en un point  $F$  situé hors du plan  $ASB$ ; car son centre est  $g$ , et l'on vient de démontrer que son rayon  $gf$  est plus grand que la distance  $gP$  du point  $g$  à la verticale  $PV$ .

La droite  $SF$  n'étant pas dans le plan  $ASB$ , les droites  $SA$ ,  $SB$ ,  $SF$ , sont les arêtes d'un angle solide triple, dont deux des angles plans sont  $ASB = c$ ,  $ASF = ASf = b$ .

Il ne reste donc qu'à faire voir que la vraie grandeur du troisième angle plan  $FSB$  est l'angle  $ESB$ . Or,  $FP$  est perpendiculaire au plan  $ASB$ , et  $Pg'$  est perpendiculaire à  $SB$ ; la droite  $Fg'$  est donc perpendiculaire sur  $SB$  (n° 133). Les triangles  $Fg'S$ ,  $f'g'S$ , sont égaux; car ils ont un angle droit en  $g'$ , le côté  $g'S$  est commun, et l'hypoténuse  $FS = f'S = f'S$ . L'angle  $FSg'$  est donc effectivement égal à  $f'Sg'$ ; de sorte que l'angle solide, ainsi construit, est formé par les trois angles plans donnés  $DSA = b$ ,  $ASB = c$ ,  $BSE = a$ .

Dans ce cas, la construction qui a été indiquée (n° 268), pour trouver les angles dièdres  $\alpha$ ,  $\zeta$ , ne sera jamais en défaut; car les droites  $gf$ ,  $g'f'$  (*fig.* 229) étant respectivement plus grandes que  $gP$  et  $g'P$ , les arcs décrits des points  $g$ ,  $g'$ , comme centres avec les rayons  $gf$ ,  $g'f'$ , couperont toujours les perpendiculaires  $PG$ ,  $PG'$ , aux droites  $Pg$ ,  $Pg'$ ; et les angles  $kgP$ ,  $k'g'P$ , exprimeront les angles dièdres  $\alpha$ ,  $\zeta$ .

Lorsque les trois angles plans donnés ne satisfont pas aux inégalités (1) (page 160), ils ne peuvent pas former un angle solide triple; les arcs décrits des points  $g$ ,  $g'$ , comme centres, avec les rayons  $gf$ ,  $g'f'$ , ne coupent plus les droites  $PG$ ,  $PG'$  ce qui indique l'impossibilité du problème proposé.

270. La construction du n° 268 fournit une seconde méthode pour réduire un angle  $\theta$  à l'horizon (n° 257); car les deux côtés de l'angle  $\theta$ , qu'il s'agit de réduire à l'horizon, forment avec la verticale un angle solide triple, dans lequel les trois



angles plans sont donnés, savoir : l'angle *oblique*  $\theta$ , et les angles *verticaux*  $V$ ,  $V'$ , que les côtés de l'angle  $\theta$  font avec la verticale. On construira l'angle dièdre  $\theta'$  formé par les deux plans verticaux qui contiennent les deux côtés de l'angle  $\theta$  (n° 268), et l'angle  $\theta'$  sera l'angle  $\theta$  réduit à l'horizon.

271. 28<sup>e</sup> PROBLÈME (fig. 231). *Connaissant les deux angles plans,  $b$ ,  $c$ , et l'angle dièdre  $\alpha$  formé par les plans de ces deux angles, construire le troisième angle plan,  $a$ , et les deux autres angles dièdres,  $\beta$ ,  $\gamma$ .*

Soit  $ASB = c$ , l'un des deux angles plans donnés, et supposez que cet angle soit tracé dans le plan horizontal sur lequel on veut exécuter la construction. Concevez que l'autre angle plan donné,  $b$ , tourne autour de l'horizontale  $SA$ , pour se rabattre sur le plan horizontal  $ASB$ ; vous obtiendrez le rabattement de cet angle, en tirant dans le plan horizontal une droite  $SD$  sous l'angle connu  $ASD = b$ .

Si la face  $ASD$  tourne autour de l'arête  $SA$ , pour reprendre sa position primitive  $ASC$ , un point quelconque  $f$  de la droite  $SD$ , décrira un arc vertical dont le rayon sera la perpendiculaire  $fg$  à  $SA$ ; et dont le centre sera  $g$ ; la projection horizontale de cet arc sera sur la perpendiculaire  $gd$  à  $SA$ ; et enfin, quand  $f$  sera parvenu en un point  $F$  de l'arête  $SC$ , la droite  $Fg$ , perpendiculaire à  $SA$ , fera avec  $gd$  un angle  $Fgd$ , qui mesurera l'angle dièdre  $\alpha$  des faces  $ASC$ ,  $ASB$ .

Concevez que le plan  $Fgd$  de l'angle  $\alpha$  tourne autour du côté horizontal  $gd$ , pour se rabattre sur le plan  $ASB$ ; vous obtiendrez le rabattement de l'autre côté  $gF$  de l'angle  $\alpha$ , en tirant dans le plan  $ASB$  une droite  $gh$ , sous l'angle donné  $dgh = \alpha$ ; et comme, dans ce mouvement, la distance du point  $f$  au point fixe  $g$ , reste constante, l'arc horizontal décrit de  $g$  comme centre avec le rayon connu  $gf$ , coupera  $gh$  en un point  $k$ , qui sera le rabattement du point  $F$  sur le plan horizontal; de sorte qu'en abaissant la perpendiculaire  $kP$  à  $gd$ , le point  $P$  sera le pied de la perpendiculaire abaissée de  $F$  sur le plan horizontal  $ASB$ .

Cela posé ; pour construire la vraie grandeur du troisième angle plan FSB, concevez que le plan FSB tourne autour de l'arête fixe SB, pour venir se rabattre sur le plan horizontal; le point F restera dans le plan perpendiculaire à SB mené par la verticale FP; ce point se rabattra donc sur la perpendiculaire Pl' à SB; mais la distance du point S au point F reste constamment égale à Sf; le rabattement de F doit donc aussi se trouver sur l'arc horizontal décrit de S comme centre avec le rayon connu Sf; le point f', où cet arc coupe Pl', est donc le rabattement du point F sur le plan horizontal; et par conséquent, si l'on tire la droite Sf'E, elle déterminera la vraie grandeur ESB du troisième angle plan,  $a$ , de l'angle solide triple proposé.

Ainsi, pour construire la troisième face de l'angle solide triple, il suffit de mener, dans un plan horizontal, trois droites SA, SB, SD (fig. 232), qui forment entre elles les angles donnés,  $ASB = c$ ,  $ASD = b$ ; par un point quelconque f de SD, on tire la perpendiculaire fd à SA; du point g, où fd coupe SA, on conduit, dans le plan ASB, la droite gh, sous l'angle donné  $dgh = a$ ; du point g comme centre, avec le rayon gf, on décrit un arc horizontal qui coupe gh en k; on tire la perpendiculaire kP à fd, et la perpendiculaire Pl' à SB; l'arc horizontal, décrit de S comme centre avec le rayon Sf, coupe la ligne Pl' en un point f'; et en tirant la droite SE, par les points connus S, f', on obtient la face ESB demandée; de sorte que l'angle  $ESB = a$ .

Cette construction déterminera toujours la troisième face de la pyramide, quelles que soient les données,  $b, c, a$ . Et en effet, la pyramide existe toujours; car, pour la construire, il suffit de tracer dans un plan, deux angles  $ASB = c$ ,  $ASD = b$  (fig. 232), et de concevoir que la face ASB restant fixe, l'autre face ASD tourne autour de AS, jusqu'à ce qu'elle forme l'angle dièdre  $a$  avec le plan ASB.

Connaissant les trois angles plans,  $a, b, c$ , de l'angle solide triple proposé, ces angles plans satisferont nécessairement aux inégalités,

$$a < b + c, b < a + c, c < a + b, a + b + c < 400^\circ,$$

et l'on construira facilement les deux angles dièdres inconnus  $\epsilon$ ,  $\gamma$ , par la méthode indiquée (n° 268).

**272. 29° PROBLÈME** (*fig. 233*). *Connaissant deux angles plans,  $b$ ,  $c$ , d'un angle solide triple, et l'angle dièdre  $\epsilon$  opposé à l'angle plan,  $b$ , construire le troisième angle plan,  $a$ , et les deux autres angles dièdres,  $\alpha$ ,  $\gamma$ .*

Si le troisième angle plan  $a$  était connu, on trouverait facilement les deux autres angles dièdres,  $\alpha$ ,  $\gamma$  (n° 268); il suffit donc de faire voir comment on peut construire l'angle plan  $a$ .

L'angle plan  $ASB = c$  étant supposé dans le plan horizontal, concevez que par un point quelconque  $g$  de l'arête  $SA$ , on mène un plan perpendiculaire à cette arête; la trace horizontale de ce plan vertical sera la perpendiculaire  $gp$  à  $SA$ , et il coupera la troisième arête  $SC$  en un certain point  $F$  de l'espace. Pour trouver ce point, nous allons chercher ses distances aux points connus,  $S$  et  $p$ .

Concevez que le plan  $CSA$  tourne autour de l'arête  $SA$ , pour se rabattre sur le plan horizontal; la droite  $gF$  se rabattra sur la perpendiculaire  $gl$  à  $SA$ , et la vraie grandeur de l'angle  $CSA$  étant  $b$ , on obtiendra le rabattement de l'arête  $SC$  en tirant par le point  $S$  une horizontale  $SD$ , sous l'angle  $ASD = b$ . Le rabattement du point  $F$  devant se trouver sur les droites  $gl$ ,  $SD$ , sera déterminé par l'intersection  $f$  de ces deux droites. Ainsi, les vraies longueurs des droites  $Fg$ ,  $FS$ , sont  $fg$  et  $fS$ . La vraie distance du point  $F$  au point  $S$  est donc  $fS$ .

Pour obtenir la distance du point  $F$  au point  $p$ , nous chercherons d'abord la direction de la droite  $pZ$  qui passe par les points  $p$ ,  $F$ , et qui est dans le plan de la face  $BSC$ ; à cet effet, nous imaginerons qu'on tire par le point  $g$ , une perpendiculaire  $gr$  à  $SB$ , et une verticale  $gH$ ; cette verticale étant dans le plan vertical  $Zpg$ , rencontrera  $pZ$  en un point  $G$ ; et la droite  $Gr$ , située dans le plan  $CSB$ , étant perpendiculaire sur  $SB$  (n° 133), l'angle  $Grg$  mesurera l'inclinaison des faces  $BSC$ ,  $BSA$ . Or, cette inclinaison est égale à l'angle donné  $\epsilon$ . Concevant donc que le plan vertical du triangle rectangle  $Ggr$ , tourne autour de sa base horizontale  $gr$ , pour se rabattre sur

le plan horizontal ASB, la verticale  $gH$  se rabattra sur la perpendiculaire  $gH'$  à  $gr$  menée dans le plan horizontal; et comme l'hypoténuse  $rG$  forme avec  $rg$  l'angle donné  $\epsilon$ , on obtiendra le rabattement de  $rG$ , sur le plan horizontal, en tirant par le point  $r$  une horizontale  $rK$ , sous l'angle  $grK = \epsilon$ . L'intersection  $m$ , des droites  $gH'$ ,  $rK$ , sera le rabattement du point  $G$  sur le plan horizontal; de sorte que  $gm$  est la vraie longueur de  $gG$ . Cela posé : si le triangle  $Ggp$ , rectangle en  $g$ , tourne autour de sa base horizontale  $gp$ , pour se rabattre sur le plan horizontal, le sommet  $G$  se rabattra en  $n$ , sur la perpendiculaire  $gA$  à  $gp$ , à une distance  $gn = gm$ ; la droite  $pZ'$ , menée par les points  $p$ ,  $n$ , sera donc le rabattement, sur le plan horizontal, de la direction  $pZ$  du côté  $pF$ , et  $F$  se rabattra sur l'un des points de  $pZ'$ . Or, la distance de  $g$  à  $F$  est  $gf$ ; décrivant donc un arc horizontal, de  $g$  comme centre avec le rayon connu  $gf$ , cet arc coupera  $pZ'$  en un point  $F'$  qui sera le rabattement du point  $F$  sur le plan horizontal; la droite  $pF'$  est donc la vraie longueur du côté  $pF$ .

Les distances du point  $F$  de l'arête  $SC$ , aux points  $S$ ,  $p$ , étant  $fS$  et  $Fp$ , si l'on conçoit que le plan  $CSB$  tourne autour de l'arête  $SB$ , pour se rabattre sur le plan horizontal  $BSA$ , le point  $F$  de  $SC$  se rabattra en un point qui sera déterminé par l'intersection  $f'$  des arcs décrits des points  $S$ ,  $p$ , comme centres, avec les rayons connus  $Sf$ ,  $pF'$ . La droite  $Sf'E'$  sera le rabattement de l'arête  $SC$  sur le plan horizontal; et, par conséquent,  $BSE'$  sera la troisième face  $\alpha$  de l'angle solide triple proposé.

Ainsi, pour *construire le troisième angle plan,  $\alpha$ , sur le plan horizontal*, on tire dans ce dernier plan des droites  $SA$ ,  $SB$ ,  $SD$  (*fig. 234*), sous les angles connus  $ASB = c$ ,  $ASD = b$ ; par un point quelconque  $g$  de  $SA$ , on mène  $pl$  perpendiculaire à  $SA$ , et  $gr$  perpendiculaire à  $SB$ ; on conduit la droite  $rK$  sous l'angle  $grK = \epsilon$ ; la perpendiculaire  $gH'$  à  $gr$ , rencontre  $rK$  en un point  $m$ ; de  $g$  comme centre avec le rayon  $gm$ , on décrit un arc qui coupe  $gA$  en  $n$ ; par les points  $p$ ,  $n$ , on mène la droite  $pZ'$ , et de  $g$  comme centre avec le rayon  $gf$ , on décrit un arc qui coupe  $pZ'$  en  $F'$ . Les arcs décrits de  $S$  et  $p$  comme centres

avec les rayons  $Sf$ ,  $pF'$ , se coupent en un point  $f'$ ; et en conduisant la droite  $SE'$ , par les points connus  $S$ ,  $f'$ , l'angle  $BSE'$  est l'angle  $\alpha$  demandé.

273. Pour discuter les différents cas qui peuvent se présenter, supposons que la face horizontale  $ASB = c$  (fig. 233) restant fixe, on conduise par l'arête  $SB$  un plan indéfini dont la partie  $X$ , située au-dessus du plan horizontal, forme l'angle dièdre  $\zeta$  avec la face  $BSA$ . Si l'on mène par le point  $g$  un plan perpendiculaire à  $SA$ , sa trace horizontale sera la perpendiculaire  $pgl$  à  $SA$ , et ce plan coupera le plan  $X$  suivant une certaine droite  $pZ$ . Cela posé : concevez que la face  $ASD = b$ , qui était couchée sur le plan horizontal, tourne autour de  $SA$ , pour former la pyramide demandée ; le point  $f$  de  $SD$  décrira un arc vertical dont le centre sera le pied  $g$  de la perpendiculaire  $fg$  à  $SA$ , et dont le rayon sera  $gf$ ; chaque point  $F$  de rencontre de cet arc avec la droite  $pZ$ , fournira une solution du problème; car en tirant la droite  $SC$ , par les points  $S$ ,  $F$ , les arêtes  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ , formeront un angle solide triple, dans lequel les angles plans  $ASB$ ,  $ASC$ , seront respectivement égaux à  $c$  et  $b$ , et l'angle dièdre formé par les faces  $BSA$ ,  $BSC$ , sera  $\zeta$ . D'ailleurs, les points où la circonférence décrite avec le rayon  $gf$ , coupe le prolongement  $pz$  de  $pZ$ , ne conviennent pas à la question, car ils correspondent aux points où cette circonférence rencontre le prolongement du plan  $X$  au-dessous du plan horizontal, et il est facile de voir que dans les pyramides qui en résultent, l'angle dièdre, opposé à la face  $ASD = b$ , est égal au supplément  $200^\circ - \zeta$  de l'angle donné  $\zeta$ .

Or, il résulte de la construction indiquée (n° 272) que si le plan vertical  $Zpl$  tourne autour de l'horizontale  $pl$ , pour se rabattre sur le plan horizontal, la droite  $pZ$  tombera en  $pZ'$  et  $pz$  deviendra le prolongement  $pz'$  de  $Z'p$ . Par conséquent, selon que la circonférence décrite, dans le plan horizontal, de  $g$  comme centre avec le rayon  $gf$ , rencontrera la droite  $pZ'$  en un point ou en deux points, le problème admettra une seule solution ou deux solutions; quand cette circonférence ne ren-

contrera pas  $pZ'$  (ce qui a lieu lorsque  $gf$  est moindre que la perpendiculaire abaissée de  $g$  sur  $z'Z'$ ), le problème sera impossible, c'est-à-dire que les données,  $b, c, \zeta$ , n'appartiendront à aucun angle solide triple.

Lorsque les données,  $b, c, \zeta$ , sont telles qu'on les a supposées dans les figures 233 et 234, la circonférence décrite de  $g$  comme centre avec le rayon  $gf$ , coupe la droite  $pZ'$  en deux points  $F', F''$ ; les circonférences décrites de  $p$  comme centre avec les rayons  $pF', pF''$ , coupent la circonférence décrite de  $S$  comme centre avec le rayon  $Sf$ , en des points  $f', f''$ , et en tirant les droites  $Sf'E', Sf''E''$ , on obtient deux solutions dans lesquelles les valeurs de la troisième face  $a$  sont  $BSE'$  et  $BSE''$ . De sorte que les données,  $b, c, \zeta$ , appartiennent à deux pyramides différentes.

274. L'angle solide triple  $S$  (fig. 235) étant formé par les trois angles plans  $ASB, ASC, BSC$ , si l'on conçoit une sphère ayant pour centre le sommet  $S$  de l'angle solide, les plans  $ASB, ASC, BSC$ , couperont la surface de cette sphère suivant des arcs  $AB, AC, BC$ , qui appartiendront à des grands cercles de la sphère (page 106), et qui pourront servir de mesure aux angles plans  $ASB, ASC, BSC$ ; ces trois arcs de grands cercles forment les côtés d'un triangle sphérique  $ABC$ ; les angles de ce triangle sphérique sont les angles dièdres formés par les plans  $ASB, ASC, BSC$ . Désignant donc par  $a, b, c$ , les arcs  $BC, AC, AB$ , qui forment les côtés du triangle sphérique  $ABC$ , et par  $\alpha, \zeta, \gamma$ , les angles de ce triangle qui sont respectivement opposés aux côtés  $a, b, c$ , les six éléments,  $a, b, c, \alpha, \zeta, \gamma$ , du triangle sphérique  $ABC$ , seront précisément les six parties que nous avons considérées dans la pyramide triangulaire. De sorte que les constructions que nous avons indiquées pour la pyramide, donnent le moyen de construire un triangle sphérique, quand on connaît trois des six éléments,  $a, b, c, \alpha, \zeta, \gamma$ , de ce triangle.

Quand les trois éléments connus sont donnés en nombres, le calcul des trois autres éléments est l'objet de la Trigonométrie sphérique.

## § VII. Problèmes sur des points et sur des lignes dont les projections sont données.

275. Dans la première partie de cet ouvrage, nous avons traité diverses questions sur des points et sur des lignes qui étaient dans un même plan. Nous allons faire voir comment on peut résoudre les mêmes questions, quand les *données* étant toujours situées sur un même plan, ne sont déterminées que par leurs projections. De sorte que *la question se réduira à construire les projections des points et des lignes qu'il s'agit de trouver*. Pour y parvenir, il suffit de savoir résoudre les deux problèmes suivans (n° 276 et 277) :

276. 30° PROBLÈME. *Connaissant un point A d'un plan donné Z, on propose de trouver le RABATTEMENT du point A sur l'un des deux plans de projection. C'est-à-dire qu'il s'agit de déterminer la position que prendra le point A du plan Z, quand ce plan, après avoir tourné autour de l'une de ses deux traces, sera rabattu sur le plan de projection qui contient cette trace.*

1<sup>er</sup> CAS (fig. 236). *On connaît les deux projections,  $a$ ,  $a'$ , d'un point A situé dans un plan Z; la trace horizontale  $st$  du plan Z est donnée; il s'agit de construire le RABATTEMENT du point A sur le plan horizontal. C'est-à-dire qu'on veut trouver la position que prendra le point A, sur le plan horizontal  $ax$ , quand le plan A $st$  sera rabattu sur le plan horizontal après avoir tourné autour de sa trace horizontale  $st$ .*

La projection horizontale  $a$ , du point A, étant le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur le plan horizontal (n° 218), si l'on tire par le point  $a$ , la perpendiculaire  $ab$  à  $st$ , la droite Ab, qui joint le point A de l'espace avec le point  $b$ , est perpendiculaire à  $st$  (n° 133). Le plan du triangle Aab, rectangle en  $a$ , est perpendiculaire au plan horizontal (n° 180) et à la trace  $st$  (n° 128); l'angle formé par l'hypoténuse Ab avec le côté  $ab$  est la mesure de l'angle que le plan A $st$  fait avec le plan horizontal (n° 174).

Quand le plan A $st$  tourne autour de sa trace horizontale  $st$ ,

le point  $b$  reste fixe, la distance de  $A$  à  $b$  est invariable, et la droite  $Ab$  reste constamment perpendiculaire sur  $at$ ; par conséquent, le point  $A$  décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à  $at$  (n° 130), dont le centre est  $b$  et dont le rayon constant est la vraie distance de  $b$  à  $A$ . Il en résulte que, lorsque le plan  $Aat$  sera rabattu sur le plan horizontal, le point  $A$  tombera nécessairement sur le prolongement  $bd$  de la perpendiculaire  $ab$  à  $at$ , à une distance de  $b$  égale à la distance de  $b$  à  $A$ . Or, cette distance est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont le côté de l'angle droit situé dans le plan horizontal est  $ab$ , et dont l'autre côté  $Aa$  de l'angle droit est égal à la distance  $a'p$  du point  $A$  au plan horizontal  $tax$  (n° 233, 4°). Conduisant donc par  $a$ , la perpendiculaire  $af$  sur  $ab$ , et prenant  $an = pa'$ , l'hypoténuse  $nb$  sera la vraie distance de  $A$  à  $b$ . De sorte qu'en prenant sur  $bd$  une longueur  $bA' = bn$ , le point  $A'$ , ainsi déterminé, sera le rabattement demandé du point  $A$  sur le plan horizontal  $tax$ .

D'après ces considérations, pour *rabattre sur le plan horizontal, le point  $(a, a')$  situé dans le plan dont la trace horizontale est  $at$* : par la projection horizontale  $a$ , on tire la perpendiculaire  $ad$  à la trace horizontale  $at$ , et la parallèle  $af$  à  $at$ ; on prend sur  $af$  une longueur  $an = pa'$ , et l'on décrit un arc de  $b$  comme centre avec le rayon  $bn$ ; cet arc coupe la droite  $ad$  en un point  $A'$  qui est le rabattement cherché du point  $(a, a')$  sur le plan horizontal.

1<sup>re</sup>. REMARQUE. Lorsque par un point quelconque  $A$  de l'espace, on mène une perpendiculaire  $Ab$  sur la trace horizontale  $at$  d'un plan  $Aat$  qui passe par ce point, cette perpendiculaire est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont le plan est perpendiculaire au plan horizontal et à la trace horizontale  $at$  du plan  $Aat$ ; l'un des côtés de l'angle droit est la distance  $ab$  de la projection horizontale  $a$  du point  $A$  à la trace horizontale  $at$ , et l'autre côté  $Aa$  de l'angle droit est égal à la distance  $a'p$  de la projection verticale  $a'$  du point  $A$  à la ligne de terre. L'angle formé par l'hypoténuse  $Ab$  avec le côté  $ba$  est égal à l'angle que le plan  $Aat$  fait avec le plan horizontal.



**2° REMARQUE.** Le triangle  $nab$  peut être considéré comme le *rabattement*, sur le plan horizontal, du triangle  $Aab$  situé dans l'espace ; c'est-à-dire que si ce dernier triangle tournait autour du côté  $ab$  de l'angle droit, le point  $A$  viendrait se rabattre en  $n$  sur le plan horizontal  $xy$ .

**3° REMARQUE.** La projection horizontale  $a$  d'un point  $A$  situé dans un plan  $Z$ , et le rabattement  $A'$  du point  $A$  sur le plan horizontal, étant toujours sur une même perpendiculaire  $ad$  à la trace horizontale  $st$  du plan  $Z$ , il en résulte, que si par l'un des points  $a, A'$ , on tire une perpendiculaire à la trace horizontale  $st$ , cette perpendiculaire passera nécessairement par l'autre point.

**2° CAS (fig 237).** On connaît les deux projections,  $a, a'$ , d'un point  $A$  situé dans un plan  $Z$  ; la trace verticale  $st'$  du plan  $Z$  est donnée ; il s'agit de construire le *RABATTEMENT*  $A''$  du point  $A$  sur le plan vertical  $t'ax$ . C'est-à-dire qu'on veut trouver la position que prendra le point  $A$ , sur le plan vertical  $t'ax$ , quand le plan  $Ast'$  sera rabattu sur ce plan vertical, après avoir tourné autour de sa trace verticale  $st'$ .

Des raisonnemens parfaitement semblables à ceux dont on a fait usage dans le 1<sup>er</sup> cas, conduisent à la construction suivante : par la projection verticale  $a'$ , on tire la perpendiculaire  $a'd'$  à la trace verticale  $st'$ , et la parallèle  $a'f'$  à  $st'$  ; on prend sur  $a'f'$  une longueur  $a'n' = pa$ , et l'on décrit un arc de  $b'$  comme centre avec le rayon  $b'n'$  ; cet arc coupe la droite  $a'd'$  en un point  $A''$  qui est le rabattement cherché du point  $(a, a')$  sur le plan vertical  $t'ax$ .

**1<sup>re</sup> REMARQUE.** Lorsque par un point quelconque  $A$  de l'espace, on mène une perpendiculaire  $Ab'$  sur la trace verticale  $st'$  d'un plan  $Ast'$  qui passe par ce point, cette perpendiculaire est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont le plan est perpendiculaire au plan vertical et à la trace verticale  $st'$  du plan  $Ast'$  ; l'un des côtés de l'angle droit est la distance  $a'b'$  de la projection verticale  $a'$  du point  $A$  à la trace verticale  $st'$ , et l'autre côté  $Aa'$  de l'angle droit est égal à la distance  $ap$  de la projection horizontale  $a$  du point  $A$  à la ligne de terre.

L'angle formé par l'hypoténuse  $Ab'$  avec le côté  $b'a'$  est égal à l'angle que le plan  $Aa'a'$  fait avec le plan vertical de projection.

2° **REMARQUE.** Le triangle  $n'a'b'$  peut être considéré comme le rabattement, sur le plan vertical, du triangle  $Aa'b'$  situé dans l'espace ; c'est-à-dire, que si ce dernier triangle tournait autour du côté  $a'b'$  de l'angle droit, le point  $A$  viendrait se rabattre en  $n'$  sur le plan vertical  $s'xy$ .

3° **REMARQUE.** La projection verticale  $a'$  d'un point  $A$  situé dans un plan  $Z$ , et le rabattement  $A''$  du point  $A$  sur le plan vertical, étant toujours sur une même perpendiculaire  $a'd'$  à la trace verticale  $as'$  du plan  $Z$ , il en résulte que si par l'un des points,  $a'$ ,  $A''$ , on tire une perpendiculaire à la trace verticale  $as'$ , cette perpendiculaire passera nécessairement par l'autre point.

3° **CAS** (*fig. 238*). On connaît les deux projections,  $a$ ,  $a'$ , d'un point  $A$  situé dans un plan  $Z$ ; la trace verticale  $as'$  du plan  $Z$  est donnée ; il s'agit de construire le rabattement  $A'$  du point  $A$  sur le plan horizontal  $axy$ .

Si la trace horizontale du plan  $Z$  était connue, la construction indiquée (1<sup>er</sup> cas) déterminerait le point cherché.

Nous allons donner deux méthodes pour trouver la trace horizontale du plan  $Z$ .

1<sup>re</sup> **MÉTHODE.** Par un point quelconque  $e'$  de la trace verticale  $as'$ , on abaisse la perpendiculaire  $e'e$  à la ligne de terre  $xy$  ; les points  $e'$ ,  $e$ , sont les projections d'un point du plan  $Z$  (n° 233, 1°) ; d'ailleurs,  $a'$  et  $a$  sont les projections d'un autre point de ce plan ; les droites  $e'a'k'$ ,  $eag$ , sont donc les projections d'une droite située dans le plan  $Z$  ; le point  $k$ , où cette dernière droite rencontre le plan horizontal (n° 244), appartiendra donc à la trace cherchée. De sorte que la droite  $ak$ , menée par les points  $a$ ,  $k$ , sera la trace horizontale demandée.

Par conséquent, lorsqu'on connaît la trace verticale  $as'$  d'un plan  $Z$ , et les projections  $a$ ,  $a'$ , d'un point de ce plan, pour trouver un point de la trace horizontale du plan  $Z$  : par un point quelconque  $e'$  de la trace verticale  $as'$ , on tire la perpendiculaire  $e'e$  à la ligne de terre  $xy$  ; par les points  $e'$ ,  $a'$ , on

mène une droite, et du point  $k'$  où elle rencontre  $xy$ , on tire la perpendiculaire  $k'r$  à  $xy$ ; la droite  $eg$ , menée par les points  $e, a$ , coupe  $k'r$  en un point  $k$  qui appartient à la trace horizontale cherchée du plan  $Z$ .

Quand la trace verticale donnée rencontre la ligne de terre en un point  $a$  situé sur la feuille destinée à tracer l'épure (ce qui a lieu dans la figure 238), la droite  $at$ , menée par les points  $a, k$ , est la trace horizontale cherchée du plan  $Z$ .

Lorsque la trace verticale donnée est parallèle à la ligne de terre  $xy$ , la trace horizontale cherchée est nécessairement parallèle à la ligne de terre; car autrement, ces deux dernières lignes se rencontreraient en un point qui appartiendrait à la ligne de terre et à la trace verticale donnée; cette trace verticale ne serait donc pas parallèle à la ligne de terre; ce qui est contre l'hypothèse. Il suffit donc encore de déterminer un point de la trace horizontale cherchée.

Enfin, quand la trace verticale donnée n'étant pas parallèle à la ligne de terre, le point de concours de ces deux lignes sort des limites de la feuille sur laquelle on trace l'épure, il faut déterminer deux points de la trace demandée.

**2<sup>e</sup> MÉTHODE.** Par le point  $(a, a')$  du plan  $Z$ , on conçoit une parallèle  $L$  à la trace verticale  $t'a$  de ce plan; les projections de la droite  $L$  sont des parallèles  $a'm', ah$ , aux projections  $t'a, yx$ , de  $t'a$  (n° 223); et comme la droite  $L$  est tout entière dans le plan  $Z$  (n° 123), le point  $m$ , où elle rencontre le plan horizontal (n° 244), appartient à la trace horizontale du plan  $Z$ . Pour trouver ce point, on tire par  $m'$ , une perpendiculaire  $m'c$  à  $xy$  qui rencontre  $ah$  au point  $m$  demandé. La droite  $at$ , menée par les points  $a, m$ , est la trace horizontale demandée du plan  $Z$ .

**REMARQUE.** Cette seconde méthode serait en défaut si la trace verticale du plan  $Z$  ne rencontrait pas la ligne de terre. Il faudrait alors avoir recours à la 1<sup>re</sup> méthode, pour déterminer deux points de la trace horizontale demandée.

Connaissant la trace horizontale  $at$  du plan  $Z$  et les projections  $a, a'$ , d'un point  $A$  de ce plan, la construction indiquée

(1<sup>er</sup> cas) sert à déterminer le rabattement  $A'$  du point  $A$  sur le plan horizontal; à cet effet, on tire par  $a$ , la perpendiculaire  $ad$  à  $at$ , et sur la parallèle  $af$  à  $at$ , on prend  $an = pa'$ ; on décrit un arc, de  $b$  comme centre avec le rayon  $bn$ ; cet arc coupe  $ad$  en un point  $A'$  qui est le rabattement demandé du point  $(a, a')$  sur le plan horizontal.

4<sup>e</sup> Cas (fig. 239). On connaît les projections,  $a, a'$ , d'un point  $A$  situé dans un plan  $Z$ ; la trace horizontale  $at$  du plan  $Z$  est donnée; il s'agit de construire le rabattement  $A'$  du point  $A$  sur le plan vertical  $d'xy$ .

Des raisonnemens analogues à ceux dont on a fait usage dans le 3<sup>e</sup> cas, conduisent aux constructions suivantes :

Pour trouver la trace verticale du plan  $Z$ , on a recours à l'une des deux méthodes que nous allons indiquer.

1<sup>re</sup> MÉTHODE. Par un point quelconque  $e$  de la trace horizontale  $at$ , on tire la perpendiculaire  $ee'$  à la ligne de terre  $xy$ ; par les points,  $e, a$ , on mène une droite, et du point  $k$  où elle rencontre  $xy$ , on tire la perpendiculaire  $kr'$  à  $xy$ ; la droite  $e'g'$ , menée par les points  $e', a'$ , coupe  $kr'$  en un point  $k'$  qui appartient à la trace verticale cherchée du plan  $Z$ .

Quand la trace horizontale donnée rencontre la ligne de terre en un point  $a$  situé sur la feuille destinée à tracer l'épure (ce qui a lieu dans la figure 239), la droite  $at'$ , menée par les points  $a, k'$ , est la trace verticale cherchée du plan  $Z$ .

Lorsque la trace horizontale donnée est parallèle à la ligne de terre, la trace verticale cherchée est aussi parallèle à la ligne de terre; de sorte qu'il suffit encore de déterminer un point de cette trace verticale.

Enfin, quand la trace horizontale donnée rencontre la ligne de terre en un point qui sort de la feuille sur laquelle on trace l'épure, il faut déterminer deux points de la trace verticale demandée.

2<sup>e</sup> MÉTHODE. Par les points,  $a, a'$ , on tire des parallèles  $am, a'h'$ , aux droites  $tx, yx$ ; par le point  $m$ , on mène une perpendiculaire  $mc'$  à  $xy$ , qui rencontre  $a'h'$  en  $m'$ ; la droite  $at'$ , menée par les points  $a, m'$ , est la trace verticale du plan  $Z$ .

**Résumé.** Cette seconde méthode serait en défaut, si la trace horizontale du plan  $Z$  ne rencontrait pas la ligne de terre. Il faudrait alors avoir recours à la 1<sup>re</sup> méthode, pour déterminer deux points de la trace verticale demandée.

Connaissant la trace verticale  $at'$  du plan  $Z$  et les projections  $a, a'$ , d'un point  $A$  de ce plan, la construction indiquée (n° cas) sert à déterminer le rabattement  $A''$  du point  $A$  sur le plan vertical; à cet effet, on tire par  $a'$ , la perpendiculaire  $d'd'$  à  $at'$ , et sur la parallèle  $a'f'$  à  $at'$ , on prend  $a'n' = pa'$ ; on décrit un arc de  $b'$  comme centre avec le rayon  $b'a'$ ; cet arc coupe  $d'd'$  en un point  $A''$  qui est le rabattement demandé du point  $(a, a')$  sur le plan vertical  $t'ax$ .

**5<sup>e</sup> Cas.** On connaît les deux traces d'un plan  $Z$ , et l'une des deux projections d'un point  $A$  situé dans le plan  $Z$ ; il s'agit de construire l'autre projection du point  $A$ , et ses rabattemens sur les deux plans de projection.

On construira d'abord l'autre projection du point  $A$  (n° 246); et ensuite, les méthodes indiquées dans les deux premiers cas, serviront à déterminer les rabattemens du point  $A$  sur les plans de projection.

Par exemple, si l'on connaît la projection verticale  $a'$  (fig. 240) d'un point  $A$  situé dans le plan  $Z$  dont les traces  $at, at'$ , sont données, et si l'on demande le rabattement  $A'$  du point  $A$  sur le plan horizontal, on cherchera d'abord l'autre projection  $a$  du point  $A$ ; à cet effet, on observera que la projection demandée devant se trouver sur la perpendiculaire  $a'c$  à la ligne de terre  $xy$  (n° 235), il suffit de déterminer une autre droite qui contienne le point  $a$ . Or, la perpendiculaire au plan vertical, menée par  $a'$ , passant par le point  $A$ , tout plan  $P$  mené par cette droite, contiendra le point  $A$ , et une droite quelconque  $m'k'$ , menée par le point  $a'$ , dans le plan  $t'ay$ , pourra être considérée comme la trace verticale du plan  $P$ ; ce plan étant perpendiculaire au plan vertical  $t'ay$  (n° 180), sa trace horizontale sera la perpendiculaire  $k'k$  à  $xy$  (n° 238, 3°); le point  $A$  se trouvant dans chacun des plans  $t'at, m'k'k$  si l'on tire une perpendiculaire  $am$  à

$xy$ , la projection horizontale  $mk$  de l'intersection de ces deux plans (n° 242) doit contenir la projection horizontale du point A. Les droites  $a'c$ ,  $mk$ , se couperont donc en un point  $a$ , qui sera la projection horizontale du point A.

D'après ces considérations, lorsqu'on connaît la projection verticale  $a'$  d'un point A situé dans un plan Z dont les traces  $at$ ,  $at'$ , sont données, pour construire la projection horizontale du point A, on mène par  $a'$  une droite quelconque  $m'k'$ ; par les points,  $m'$ ,  $a'$ ,  $k'$ , on tire les perpendiculaires  $m'm$ ,  $a'c$ ,  $k'k$ , à la ligne de terre  $xy$ ; par les points  $m$ ,  $k$ , on conduit la droite  $mk$  qui rencontre  $a'c$  en  $a$ ; le point,  $a$ , est la projection horizontale demandée du point A.

Connaissant les projections  $a$ ,  $a'$ , du point A, situé dans le plan dont la trace horizontale  $at$  est donnée, la construction indiquée (1<sup>er</sup> cas) détermine le rabattement A' du point ( $a$ ,  $a'$ ) sur le plan horizontal; à cet effet, on tire par  $a$ , la perpendiculaire  $ad$  à  $at$ ; sur la parallèle  $af$  à  $at$ , on prend  $an = pa'$ , et de  $b$  comme centre, avec le rayon  $bn$ , on décrit un arc qui coupe  $ad$  au point A' demandé.

6<sup>e</sup> Cas (fig. 241). On connaît la projection horizontale,  $a$ , d'un point A situé dans un plan Z; la trace horizontale  $at$  du plan Z est donnée, ainsi que l'angle  $\gamma$  qu'il forme avec le plan horizontal  $xy$ . Il s'agit de construire les rabattements A', A'', du point A sur les plans de projection, et de trouver l'autre projection  $a'$  du point A.

Pour construire le rabattement A' du point A sur le plan horizontal, on observe que  $a$  étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point A de l'espace sur le plan horizontal  $xy$ , si l'on mène la perpendiculaire  $ab$  à  $at$ , la droite Ab sera perpendiculaire à  $at$  (n° 133); l'angle  $Abx$  sera donc égal à l'angle  $\gamma$  formé par le plan Z avec le plan horizontal (n° 174). Par conséquent, pour construire le triangle  $Aab$ , rectangle en  $a$ , il suffit de tirer par  $b$  une droite  $br$  qui forme avec  $ba$  un angle  $rba$  égal à l'angle donné  $\gamma$ , et de mener la parallèle  $af$  à  $at$ ; les droites  $br$ ,  $af$ , se couperont en un

point  $n$ , et le triangle  $nab$  sera égal au triangle  $Aab$  situé dans l'espace. On aura donc,  $bn = bA$  et  $an = aA$ .

D'ailleurs,  $Ab$  étant perpendiculaire sur  $at$ , le rabattement de  $A$  (sur le plan horizontal) sera sur le prolongement  $bd$  de la perpendiculaire  $ab$  à  $at$ , à une distance de  $b$  égale à  $bA$ ; décrivant donc un arc de  $b$  comme centre avec le rayon  $bn$ , cet arc coupera  $bd$  en un point  $A'$  qui sera le rabattement du point  $A$  sur le plan horizontal  $tax$ .

Pour trouver la projection verticale  $a'$  du point  $A$ , on observe que cette projection doit se trouver sur la perpendiculaire  $ae'$  à la ligne de terre  $xy$ , à une distance de  $p$  égale à  $aA$  (n° 233, 4°); et comme  $aA = an$ , on obtiendra le point  $a'$  en prenant sur  $pe'$  une longueur  $pa' = an$ .

Connaissant les projections  $a$ ,  $a'$ , du point  $A$ , situé dans le plan  $Z$ , dont la trace horizontale  $at$  est donnée, les méthodes indiquées (4° cas) serviraient à trouver la trace verticale  $at'$  du plan  $Z$  et le rabattement  $A'$  du point  $A$  sur le plan vertical  $t'ax$ .

Mais, comme on connaît l'angle  $\gamma$  que le plan  $Z$  forme avec le plan horizontal, on peut *construire plus simplement la trace verticale  $at'$  du plan  $Z$* . En effet, si par un point quelconque  $m'$  de la trace cherchée  $at'$ , on conçoit la perpendiculaire  $m'm$  à  $xy$ , cette droite sera perpendiculaire au plan horizontal (n° 182); et en menant par son pied  $m$ , la perpendiculaire  $mq$  à la trace horizontale  $at$ , la droite qui joint dans l'espace le point  $m'$  au point  $q$ , sera perpendiculaire à  $at$  (n° 133), et sera dans le plan  $t'at$ ; l'angle  $m'qm$  sera donc égal à  $\gamma$  (n° 174). Ainsi, dans le triangle  $m'mq$ , rectangle en  $m$ , on connaît le côté  $mq$  de l'angle droit et l'angle  $\gamma$  que l'hypoténuse  $m'q$  fait avec ce côté; conduisant donc par  $m$  la perpendiculaire  $ms$  à  $mq$ , menant par  $q$  la droite  $qv$ , sous l'angle  $mqv = \gamma$ , les droites  $ms$ ,  $qv$ , se rencontreront en un point  $\delta$ ; le triangle  $\delta mq$  sera la vraie grandeur du triangle  $m'mq$  situé dans l'espace, et  $m\delta$  sera égal à  $mm'$ .

D'après ces considérations, lorsqu'on connaît la trace hori-

zontale  $at$  d'un plan  $Z$  et l'angle  $\gamma$  qu'il forme avec le plan horizontal, pour construire la trace verticale  $at'$  du plan  $Z$ : par un point quelconque  $q$  de  $at$ , on mène une perpendiculaire à  $at$ , qui rencontre la ligne de terre  $xy$ , en  $m$ ; par  $m$ , on tire  $ms'$  perpendiculaire à  $xy$  et  $ms$  perpendiculaire à  $mq$ ; par le point  $q$ , on conduit la droite  $qv$  sous l'angle  $mqv = \gamma$ ; les droites  $ms$ ,  $qv$ , se coupent en un point  $d$ ; on décrit un arc du point  $m$  comme centre avec le rayon  $md$ ; cet arc coupe  $ms'$  en un point  $m'$  de la trace cherchée; de sorte que cette trace est la droite  $at'$  menée par les points  $a$ ,  $m'$ .

REMARQUE. Pour construire le rabattement du point  $A$  sur le plan horizontal, on avait conduit la perpendiculaire  $ab$  à  $at$ , et la droite  $br$  sous l'angle  $abr = \gamma$ ; ces lignes étant connues, on peut encore simplifier la construction qui vient d'être indiquée pour déterminer la trace verticale  $at'$ ; car, la position du point par lequel on mène la perpendiculaire à  $at$  étant arbitraire, on peut choisir le point  $b$ ; il suffit alors de prolonger la perpendiculaire  $ba$  à  $at$ , jusqu'au point  $c$  où elle rencontre la ligne de terre  $xy$ ; par ce point, on mène la perpendiculaire  $ck'$  à  $xy$ , et la parallèle  $ch$  à  $at$  qui rencontre la ligne connue  $br$  en  $l$ ; l'arc décrit de  $c$  comme centre avec le rayon  $cl$ , rencontre  $ck'$  en un point  $e'$  qui appartient à la trace verticale cherchée.

Enfin, d'après ce qu'on a vu (2<sup>e</sup> cas, page 170), pour construire le rabattement  $A''$  du point  $(a, a')$ , sur le plan vertical  $tax$ , par le point  $a'$ , on tire la perpendiculaire  $a'd'$  à  $at'$ , et sur la parallèle  $a'f'$  à  $at'$ , on prend  $a'n' = pa$ ; on décrit un arc, de  $b'$  comme centre avec le rayon  $b'n'$ ; cet arc coupe  $a'd'$  en un point  $A''$  qui est le rabattement demandé.

7<sup>e</sup>. CAS. Connaissant la projection verticale d'un point  $A$  situé dans un plan dont la trace verticale est donnée et qui forme un angle connu avec le plan vertical de projection, construire l'autre projection du point  $A$ , ainsi que ses rabattemens sur les plans de projection.

On résoudra ce problème à l'aide de raisonnemens parfaitement semblables à ceux dont on a fait usage dans le 6<sup>e</sup> cas.



277. 31<sup>e</sup> PROBLÈME. *Connaissant le rabattement sur l'un des deux plans de projection, d'un point A situé dans un plan donné Z, on propose de construire les projections de ce point.*

1<sup>er</sup> CAS (fig. 242 et 243). *On connaît le rabattement A', sur le plan horizontal, d'un point A situé dans un plan Z dont les traces  $\alpha t$ ,  $\alpha'$ , sont données; il s'agit de construire les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point A.*

On suppose qu'après avoir fait tourner le plan  $\alpha t \alpha'$  autour de sa trace horizontale  $\alpha t$ , pour le rabattre sur le plan horizontal  $\alpha \alpha'$ , le point A du plan  $\alpha t \alpha'$  est venu en A' sur le plan horizontal. Il en résulte que réciproquement, si le plan rabattu A'  $\alpha t$  tourne autour de  $\alpha t$ , pour reprendre sa position primitive  $\alpha t \alpha'$ , le point A' viendra coïncider avec le point A dont il s'agit de trouver les projections,  $a$ ,  $a'$ . Nous allons donner deux méthodes, pour construire ces projections.

1<sup>re</sup> MÉTHODE (fig. 242). La projection horizontale  $a$  du point A, devant se trouver sur la perpendiculaire A'b à  $\alpha t$  menée par A' (3<sup>e</sup> remarque, page 170), la recherche de cette projection se réduit à déterminer la distance  $ab$ . Or, d'après ce qu'on a vu (n° 276, 1<sup>er</sup> cas),  $ab$  est l'un des côtés de l'angle droit dans le triangle Aab rectangle en  $a$ ; l'hypoténuse Ab est égale à la ligne connue A'b; et comme cette hypoténuse fait avec le côté  $ab$  un angle égal à l'angle  $\gamma$  que le plan  $\alpha t \alpha'$  forme avec le plan horizontal, il suffit, pour être en état de construire le triangle Aab, de trouver l'angle  $\gamma$ .

On pourrait déterminer l'angle  $\gamma$  par la méthode du n° 259; mais dans le cas actuel, la construction devient plus simple en observant que le plan du triangle Aab étant perpendiculaire à la trace  $\alpha t$  et au plan horizontal (n° 276, 1<sup>er</sup> cas), la trace horizontale du plan Aab est la perpendiculaire  $bac$  à  $\alpha t$ , et sa trace verticale est la perpendiculaire  $cc'$  à la ligne de terre  $\alpha \alpha'$ ; la droite  $bc'$ , qui joint dans l'espace les points  $b$  et  $c'$ , est perpendiculaire à  $\alpha t$  et forme avec  $bc$  un angle égal à  $\gamma$  (n° 174). D'ailleurs,  $c'c$  étant perpendiculaire au plan horizontal (n° 182), la droite  $bc'$  est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont  $cb$  et  $cc'$ ;

par conséquent, si l'on mène la perpendiculaire  $ch$  à  $cb$ , si l'on prend  $cl = ce'$ , et si l'on tire l'hypoténuse  $lb$ , le triangle  $lcb$  sera égal au triangle  $c'cb$ , et l'angle  $lbc$  sera égal à  $\gamma$ .

Il en résulte que si l'on porte sur  $bl$  une longueur  $bn = bA'$ , et si l'on abaisse la perpendiculaire  $na$  à  $bc$ , le triangle  $nab$  sera égal au triangle  $Aab$ , et le pied  $a$  de la perpendiculaire  $na$  sera la projection horizontale du point  $A$ . On aura  $aA = an$ .

La projection verticale du point  $A$  doit se trouver sur la perpendiculaire  $ae'$  à la ligne de terre  $xy$ , à une distance de cette ligne égale à  $aA$  (n° 233, 4°); et comme  $aA = an$ , on obtiendra la projection verticale  $a'$  du point  $A$ , en portant sur  $pe'$  une longueur  $pa' = an$ .

D'après ces considérations, lorsqu'on connaît le rabattement  $A'$ , sur le plan horizontal, d'un point  $A$  de l'espace situé dans le plan dont les traces  $at$ ,  $at'$ , sont données, pour construire les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point  $A$ , on tire par  $A'$  une perpendiculaire à la trace horizontale  $at$ ; par le point  $c$ , où cette perpendiculaire rencontre la ligne de terre  $xy$ , on mène la perpendiculaire  $cc'$  à  $xy$  et la parallèle  $ch$  à  $at$ ; on décrit un arc, de  $c$  comme centre avec le rayon  $cc'$ ; cet arc coupe  $ch$  en  $l$ ; on tire la droite  $bl$ , et l'on décrit un arc de  $b$  comme centre avec le rayon connu  $bA'$ ; par le point  $n$ , où cet arc coupe  $bl$ , on mène la perpendiculaire  $na$  à  $bc$ ; du pied  $a$  de cette perpendiculaire, on tire  $ae'$ , perpendiculaire sur  $xy$ , et l'on prend  $pa' = an$ ; les points,  $a$ ,  $a'$ , ainsi déterminés, sont les projections demandées du point  $A$ .

1<sup>re</sup> REMARQUE. Le point  $A$  étant dans chacun des plans  $at'$ ,  $bcc'$ , doit se trouver sur leur intersection  $bc'$ ; la projection verticale de ce point doit donc se trouver sur la projection verticale de l'intersection  $bc'$  de ces deux plans. Or, en tirant la perpendiculaire  $bb'$  à  $xy$ , la droite  $b'b'$  est la projection verticale de l'intersection  $bc'$  (n° 242). Par conséquent, si la construction a été faite avec exactitude, la droite  $b'e'$  passera par le point  $a'$ .

2<sup>e</sup> REMARQUE. Les triangles rectangles  $lcb$ ,  $nab$ , peuvent être considérés comme les rabattemens (sur le plan horizontal)

277. 31<sup>e</sup> PROBLÈME. Connaissant le rabattement de deux plans de projection, d'un point A donné Z, on propose de construire les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point A.

1<sup>re</sup> CAS (fig. 242 et 243). On connaît sur le plan horizontal, d'un point A, les traces  $at$ ,  $at'$ , sont données; il s'agit de trouver les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point A.

On suppose qu'après avoir fait la trace horizontale  $at$ , pour le plan horizontal, le point A du plan horizontal. Il en résulte que le point A' tourne autour de la trace verticale  $at'$ , le point A il s'agit de trouver les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point A. On suppose qu'après avoir fait la trace horizontale  $at$ , pour le plan horizontal, le point A du plan horizontal. Il en résulte que le point A' tourne autour de la trace verticale  $at'$ , le point A il s'agit de trouver les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point A. On suppose qu'après avoir fait la trace horizontale  $at$ , pour le plan horizontal, le point A du plan horizontal. Il en résulte que le point A' tourne autour de la trace verticale  $at'$ , le point A il s'agit de trouver les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point A.

1<sup>re</sup> MÉTHODE. On suppose qu'après avoir fait la trace horizontale  $at$ , pour le plan horizontal, le point A du plan horizontal. Il en résulte que le point A' tourne autour de la trace verticale  $at'$ , le point A il s'agit de trouver les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point A. On suppose qu'après avoir fait la trace horizontale  $at$ , pour le plan horizontal, le point A du plan horizontal. Il en résulte que le point A' tourne autour de la trace verticale  $at'$ , le point A il s'agit de trouver les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point A.

Cela posé : si par le point donné A', on mène une droite  $A'B'$  qui rencontre en B' le rabattement  $af$  de la trace horizontale  $at$ , on conçoit que le plan  $atf$  tourne autour de la trace horizontale  $at$  lorsque le point A' sera parvenu en A, le plan  $atf$  sera dans la position  $at'a'$ , la droite  $af$  viendra sur  $at'$ ; le point B' sera en  $b'$  sur  $at'$ , à une distance  $ab'$  de  $a$  égale à la distance  $A'B'$  à  $at$  prendra la position  $Ab'$ . La droite  $aa'$  parallèle à  $at$  et passant par le point  $b'$  dont la

des triangles  $c'cb$ ,  $Aab$  (situés dans l'espace); c'est-à-dire que si le triangle  $c'cb$  tourne autour du côté  $cb$  de l'angle droit  $c$ , lorsque l'autre côté  $cc'$  de l'angle droit sera rabattu sur le plan horizontal  $txy$ , les points  $c'$  et  $A$  viendront respectivement en  $l$  et en  $n$ .

2° MÉTHODE (fig. 243). On construit d'abord le rabattement, sur le plan horizontal  $A'xy$ , de la trace verticale  $at$  du plan  $tas$ .

On obtiendrait ce rabattement en déterminant l'angle  $\theta$  formé par les traces  $at$ ,  $at'$  (n° 255); et en tirant par le point  $a$  (dans le plan horizontal) une droite  $af$  sous l'angle  $taf = \theta$ . Mais il est plus simple de chercher le rabattement sur le plan horizontal d'un point quelconque  $l'$  de la trace verticale  $at'$ ; à cet effet, on observe, que si le plan  $t'at$  tourne autour de sa trace horizontale  $at$ , pour se rabattre sur le plan horizontal, la distance du point  $l'$  au point fixe  $a$ , ne change pas; décrivant donc (dans le plan horizontal) un arc  $l'rs$ , de  $a$  comme centre avec le rayon connu  $al'$ , le rabattement du point  $l'$  devra se trouver sur cet arc. D'ailleurs, si l'on tire la perpendiculaire  $l'l$  à la ligne de terre  $xy$ , et la perpendiculaire  $lp$  à  $at$ ; la droite  $l'l$  sera perpendiculaire au plan horizontal (n° 182); et la droite  $lp$ , qui joint, dans l'espace, le point  $l$  au point  $p$ , étant perpendiculaire à  $at$  (n° 133), le point  $l$  se rabattra sur le prolongement  $pq$  de la perpendiculaire  $lp$  à  $at$ ; le point  $L'$ , où la droite  $lq$  rencontre l'arc  $l'rs$ , est donc le rabattement du point  $l'$  sur le plan horizontal. La droite  $af$ , menée par les points  $a$ ,  $L'$ , est donc le rabattement cherché de la trace verticale  $at'$ .

Cela posé : si par le point donné  $A'$ , on mène une parallèle à  $tx$ , qui rencontre en  $B'$  le rabattement  $af$  de  $at'$ , et si l'on conçoit que le plan  $tas$  tourne autour de la trace horizontale  $at$ ; lorsque le point  $A'$  sera parvenu en  $A$ , le plan  $tas$  aura pris la position  $tas'$ , la droite  $af$  viendra sur  $at'$ ; le point  $B'$  viendra en  $b'$  sur  $at'$ , à une distance  $ab'$  de  $a$  égale à  $aB'$ ; et la parallèle  $A'B'$  à  $tx$  prendra la position  $Ab'$ . La droite  $Ab'$  étant parallèle à  $tx$  et passant par le point  $b'$  dont la projection

horizontale est le pied  $b$  de la perpendiculaire  $b'b$  à  $xy$  (n° 233), on obtiendra les projections de  $Ab'$  en tirant par  $b'$  et  $b$  des parallèles  $b'd'$ ,  $bn$ , aux projections  $xy$ ,  $at$ , de  $at$  (n° 223). Or, la droite  $Ab'$  passant par le point  $A$ , ses projections  $b'd'$ ,  $bn$ , passent par les projections cherchées de  $A$ . D'ailleurs, le point  $A'$  étant le rabattement, sur le plan horizontal, d'un point  $A$  du plan  $tat'$ , la projection horizontale du point  $A$  est sur la perpendiculaire  $A'c$  à  $at$  (3<sup>e</sup> remarque, page 170). Les droites  $bn$ ,  $A'c$ , se coupent donc en un point  $a$  qui est la projection horizontale cherchée du point  $A$ .

La projection verticale du point  $A$  devant se trouver sur la perpendiculaire  $ae'$  à  $xy$  (n° 235), et sur la parallèle  $b'd'$  à  $xy$ , le point  $a'$ , où ces droites se coupent, est la projection verticale du point  $A$ .

D'après ces observations, pour construire, par cette 2<sup>e</sup> méthode, les projections d'un point  $A$  du plan  $tat'$ , dont le rabattement sur le plan horizontal est le point donné  $A'$ , on prend un point quelconque  $l'$  de la trace verticale  $at'$  du plan  $tat'$ ; on décrit un arc  $l'rs$ , de  $s$  comme centre avec le rayon  $sl'$ ; on tire la perpendiculaire  $ll'$  à la ligne de terre  $xy$ , et la perpendiculaire  $lq$  à la trace horizontale  $at$ ; la droite  $lq$  coupe l'arc  $l'rs$  en un point  $L'$  qui est le rabattement du point  $l'$  sur le plan horizontal; et la droite  $sf$ , menée par les points  $s$ ,  $L'$ , est le rabattement de la trace  $at'$  sur ce plan horizontal. Par le point donné  $A'$ , on mène  $A'B'$  parallèle à la trace horizontale  $ts$ ; on décrit un arc, de  $s$  comme centre avec le rayon connu  $sB'$ ; par le point  $b'$ , où cet arc coupe la trace verticale  $at'$ , on mène la parallèle  $b'd'$  à  $xy$  et la perpendiculaire  $b'b$  à  $xy$ ; par le pied  $b$  de cette perpendiculaire, on tire  $bn$  parallèle à  $at$ ; la perpendiculaire  $A'c$  à  $at$ , menée par  $A'$ , coupe la droite  $bn$  en un point  $a$  qui est la projection horizontale du point  $A$ . On mène par  $a$ , la perpendiculaire  $ae'$  à  $xy$ ; cette perpendiculaire coupe la droite  $b'd'$  en un point  $a'$ , qui est la projection verticale du point  $A$ .

REMARQUE. Le point  $B'$  étant le rabattement, sur le plan horizontal, du point  $b'$  (situé dans le plan  $tat'$ ) dont la projection



horizontale est  $b$ , la droite  $bB'$  doit être perpendiculaire à la trace horizontale  $\alpha t$  du plan  $\alpha t'$  (3<sup>e</sup> remarque, page 174).  
 2<sup>e</sup> Cas (fig. 244 et 245). On connaît le rabattement d'un point  $A$  situé dans un plan  $Z$  de traces  $\alpha t$ ,  $\alpha t'$ , sont données; il s'agit de construire les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point  $A$ .

Des raisonnemens analogues à ceux dont on a fait dans le 1<sup>er</sup> cas, conduisent aux constructions suivantes :

1<sup>re</sup> Méthode (fig. 244). Par le point donné  $A''$ , on mène une perpendiculaire  $A''c'$  à la trace verticale  $\alpha t'$ ; par le point  $c'$  où cette perpendiculaire rencontre la ligne de terre  $xy$ , on mène la perpendiculaire  $c'c$  à  $xy$  et la parallèle  $c'h'$  à  $\alpha t'$ ;  $c'$  décrit un arc de  $c'$  comme centre avec le rayon  $c'e$ ; ce arc coupe  $c'h'$  en  $l'$ ; on tire la droite  $b'l'$ , et l'on décrit un arc de  $b'$  comme centre avec le rayon connu  $b'A''$ ; par le point où cet arc coupe  $b'l'$ , on abaisse la perpendiculaire  $n'a'$  au pied  $a'$  de cette perpendiculaire, on tire  $a'e$  perpendiculaire sur  $xy$ , et l'on prend  $pa' = a'n'$ ; les points  $a'$ ,  $a$  déterminés, sont les projections demandées du point  $A$ .

1<sup>re</sup> REMARQUE. Si l'on tire par  $b'$ , la perpendiculaire à la ligne de terre  $xy$ , la droite  $bc$  devra passer par le point  $c$ .

2<sup>e</sup> REMARQUE. Les triangles rectangles  $l'c'b'$ ,  $n'a'b'$ , sont considérés comme les *rabattemens* (sur le plan vertical) des triangles  $cc'b'$ ,  $aa'b'$  (situés dans l'espace); c'est-à-dire le triangle  $cc'b'$  tourne autour du côté  $c'b'$  de l'angle droit et l'autre côté  $c'c$  de l'angle droit sera rabattu sur le plan  $\alpha t'$ , les points  $c$  et  $A$ , viendront respectivement en  $l'$  et  $a'$ .

2<sup>e</sup> Méthode (fig. 245). On prend un point quelconque  $a$  de la trace horizontale  $\alpha t$  du plan  $\alpha t'$ ; on décrit un arc de  $a$  comme centre avec le rayon  $\alpha l$ ; on tire la perpendiculaire  $l'$  à la ligne de terre  $xy$ , et la perpendiculaire  $l'a'$  à la trace verticale  $\alpha t'$ ; la droite  $l'q'$  coupe l'arc  $lr's'$  en  $s'$  qui est le rabattement du point  $l$  sur le plan vertical; on tire la droite  $\alpha f'$ , menée par les points  $\alpha$ ,  $L''$ , est le rabattement de la trace  $\alpha t$  sur ce plan vertical. Par le point  $d$  où  $\alpha f'$  coupe la ligne de terre, on mène  $A''B''$  parallèle à la trace verticale  $\alpha t'$ ; on c

de se construire avec le rayon connu  $ab'$ , par le point  $b$ , où cet arc coupe la trace horizontale  $ac$ . Au même le cercle  $bd$  à  $xy$  et la perpendiculaire  $bd$  à  $xy$ ; par le point  $d$  de cette perpendiculaire on tire  $d'$  parallèle à  $ac$ ; la perpendiculaire  $A'e'$  à  $ac$ , mené par le point donné  $A'$ , coupe la droite  $d'e'$  au point  $e'$  qui est la projection verticale de point  $A$ . On mène par  $e'$  la perpendiculaire  $ee'$  à  $xy$ ; cette perpendiculaire coupe la trace  $bd$  en ce point  $e$  qui est la projection horizontale du point  $A$ .

REMARQUE. La droite  $b'B'$  doit être perpendiculaire à la trace verticale  $ac$  du plan  $ac$ .

3<sup>e</sup> Cas (fig. 210). On connaît le rabattement  $A$  sur le plan horizontal, d'un point  $A$  sur une droite du plan  $Z$  dans le plan horizontal  $ac$  en donné; on connaît aussi l'angle  $\gamma$  que le plan  $Z$  forme avec le plan horizontal; on agit de même pour les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point  $A$ .

La projection horizontale  $a$  du point  $A$  devant se trouver sur la perpendiculaire  $Aa$  à la trace horizontale  $ac$ , (3<sup>e</sup> remarque, page 170), la recherche de cette projection se réduit à déterminer la distance  $ba$ . Or, d'après ce qu'on a vu,  $a'$  a été 1<sup>er</sup> cas. On connaît les droites menées du point  $A$  de l'espace aux points  $a$ ,  $b$ , l'hypoténuse  $Ab$  du triangle rectangle  $Aab$ , sera l'angle  $\gamma$  avec le côté  $ab$  et sera égale à  $Aa$ . Par conséquent, pour construire, sur le plan horizontal, le triangle  $Aab$  situé dans l'espace, il suffit de mener par  $b$  une droite  $br$  sous l'angle  $cbr = \gamma$ , de prendre  $br = bA$ , et de tirer par  $a$  la perpendiculaire  $as$  à  $br$ ; le pied  $a$  de cette perpendiculaire sera la projection horizontale cherchée du point  $A$ , et le triangle  $abs$  sera égal au triangle  $Aba$ .

Pour construire la projection verticale  $a'$  de  $A$ , on observe que cette projection doit se trouver sur la perpendiculaire  $ae'$  à la ligne de terre  $xy$ , à une distance de  $p$  égale à  $as$  (page 169).

D'après ces observations, pour construire les projections  $a$ ,  $a'$ , du point  $A$ , dont le rabattement sur le plan horizontal est  $A$ , par le point donné  $A'$ , on tire la perpendiculaire  $A'e'$  à la



horizontale est  $b$ , la droite  $bB'$  doit être perpendiculaire à la trace horizontale  $at$  du plan  $tat'$  (3<sup>e</sup> remarque, page 170).

2<sup>e</sup> Cas (fig. 244 et 245). On connaît le rabattement  $A''$ , sur le plan vertical, d'un point  $A$  situé dans un plan  $Z$  dont les traces  $at$ ,  $at'$ , sont données; il s'agit de construire les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point  $A$ .

Des raisonnemens analogues à ceux dont on a fait usage dans le 1<sup>er</sup> cas, conduisent aux constructions suivantes :

1<sup>re</sup> Méthode (fig. 244). Par le point donné  $A''$ , on tire la perpendiculaire  $A''c'$  à la trace verticale  $at'$ ; par le point  $c'$ , où cette perpendiculaire rencontre la ligne de terre  $xy$ , on mène la perpendiculaire  $c'c$  à  $xy$  et la parallèle  $c'h'$  à  $at'$ ; on décrit un arc de  $c'$  comme centre avec le rayon  $c'e$ ; cet arc coupe  $c'h'$  en  $l'$ ; on tire la droite  $b'l'$ , et l'on décrit un arc de  $b'$  comme centre avec le rayon connu  $b'A''$ ; par le point  $n'$ , où cet arc coupe  $b'l'$ , on abaisse la perpendiculaire  $n'a'$  à  $at'$ ; du pied  $a'$  de cette perpendiculaire, on tire  $a'e$  perpendiculaire sur  $xy$ , et l'on prend  $pa = a'n'$ ; les points  $a'$ ,  $a$ , ainsi déterminés, sont les projections demandées du point  $A$ .

1<sup>re</sup> REMARQUE. Si l'on tire par  $b'$ , la perpendiculaire  $b'b$  à la ligne de terre  $xy$ , la droite  $bc$  devra passer par le point  $a$ .

2<sup>e</sup> REMARQUE. Les triangles rectangles  $l'c'b'$ ,  $n'a'b'$ , peuvent être considérés comme les *rabattemens* (sur le plan vertical) des triangles  $cc'b'$ ,  $aa'b'$  (situés dans l'espace); c'est-à-dire que, si le triangle  $cc'b'$  tourne autour du côté  $c'b'$  de l'angle droit  $c'$ , lorsque l'autre côté  $c'c$  de l'angle droit sera rabattu sur le plan vertical  $t'at'$ , les points  $c$  et  $A$ , viendront respectivement en  $l'$  et en  $n'$ .

2<sup>e</sup> Méthode (fig. 245). On prend un point quelconque  $l$  de la trace horizontale  $at$  du plan  $tat'$ ; on décrit un arc  $lr's'$ , de  $a$  comme centre avec le rayon  $al$ ; on tire la perpendiculaire  $l'l'$  à la ligne de terre  $xy$ , et la perpendiculaire  $l'q'$  à la trace verticale  $at'$ ; la droite  $l'q'$  coupe l'arc  $lr's'$  en un point  $L'$  qui est le rabattement du point  $l$  sur le plan vertical; et la droite  $af'$ , menée par les points  $a$ ,  $L'$ , est le rabattement de la trace  $at$  sur ce plan vertical. Par le point donné  $A''$ , on mène  $A''B''$  parallèle à la trace verticale  $t'a$ ; on décrit un arc

de  $a$  comme centre avec le rayon connu  $aB''$ ; par le point  $b$ , où cet arc coupe la trace horizontale  $st$ , on mène la parallèle  $bd$  à  $xy$  et la perpendiculaire  $bb'$  à  $xy$ ; par le pied  $b'$  de cette perpendiculaire, on tire  $b'n'$  parallèle à  $st$ ; la perpendiculaire  $A''c'$  à  $st$ , menée par le point donné  $A''$ , coupe la droite  $b'n'$  en un point  $a'$  qui est la projection verticale du point  $A$ . On mène par  $a'$ , la perpendiculaire  $a'e$  à  $xy$ ; cette perpendiculaire coupe la droite  $bd$  en un point  $a$  qui est la projection horizontale du point  $A$ .

**REMARQUE.** La droite  $b'B''$  doit être perpendiculaire à la trace verticale  $st$  du plan  $st$ .

**3<sup>e</sup> Cas (fig. 246).** On connaît le rabattement  $A'$  sur le plan horizontal, d'un point  $A$  situé dans un plan  $Z$  dont la trace horizontale  $st$  est donnée; on connaît aussi l'angle  $\gamma$  que le plan  $Z$  forme avec le plan horizontal; il s'agit de construire les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point  $A$ .

La projection horizontale  $a$ , du point  $A$ , devant se trouver sur la perpendiculaire  $A'c$  à la trace horizontale  $st$  (3<sup>e</sup> remarque, page 170), la recherche de cette projection se réduit à déterminer la distance  $ba$ . Or, d'après ce qu'on a vu (n<sup>o</sup> 276, 1<sup>er</sup> cas), si l'on conçoit les droites menées du point  $A$  de l'espace aux points  $a$ ,  $b$ , l'hypoténuse  $Ab$ , du triangle rectangle  $Aab$ , formera l'angle  $\gamma$  avec le côté  $ab$  et sera égale à  $A'b$ . Par conséquent, pour construire, sur le plan horizontal, le triangle  $Aab$  situé dans l'espace, il suffit de mener par  $b$  une droite  $br$  sous l'angle  $cbr = \gamma$ , de prendre  $bn = bA'$ , et de tirer par  $n$  la perpendiculaire  $na$  à  $bc$ ; le pied  $a$  de cette perpendiculaire sera la projection horizontale cherchée du point  $A$ , et le triangle  $nba$  sera égal au triangle  $Aba$ .

Pour construire la projection verticale  $a'$  de  $A$ , on observe que cette projection doit se trouver sur la perpendiculaire  $as'$  à la ligne de terre  $xy$ , à une distance de  $p$  égale à  $an$  (page 169).

D'après ces observations, pour construire les projections  $a$ ,  $a'$ , du point  $A$ , dont le rabattement sur le plan horizontal est  $A'$ , par le point donné  $A'$ , on tire la perpendiculaire  $A'c$  à la

trace horizontale donnée  $at$  ; par le point  $b$ , où cette perpendiculaire coupe  $at$ , on tire la droite  $br$  qui forme avec  $bc$  un angle  $cbr$  égal à l'angle donné  $\gamma$  ; on décrit un arc, de  $b$  comme centre avec le rayon connu  $bA'$  ; du point  $n$ , où cet arc rencontre la droite  $br$ , on mène la perpendiculaire  $na$  à  $bc$  ; par le pied  $a$  de cette perpendiculaire, on tire  $ac'$  perpendiculaire sur la ligne de terre  $xy$ , et à partir du point  $p$  où cette perpendiculaire rencontre  $xy$ , on prend sur  $pe'$  une longueur  $pa'$  égale à  $an$  ; les points  $a$ ,  $a'$ , ainsi déterminés, sont les projections demandées du point  $A$ .

4<sup>e</sup> CAS (fig. 247). On connaît le rabattement  $A''$ , sur le plan vertical  $A''xy$ , d'un point  $A$  situé dans un plan  $Z$  dont la trace verticale  $at'$  est donnée ; on connaît aussi l'angle  $\gamma'$  que le plan  $Z$  fait avec le plan vertical  $yat'$  ; il s'agit de trouver les projections,  $a$ ,  $a'$ , du point  $A$ .

Des raisonnemens analogues à ceux dont on a fait usage dans le 3<sup>e</sup> cas, conduisent à la construction suivante : par le point donné  $A''$ , on tire la perpendiculaire  $A''c'$  à la trace verticale donnée  $at'$  ; par le point  $b'$ , où cette perpendiculaire coupe  $at'$ , on tire la droite  $b'r'$  qui forme avec  $b'c'$  un angle égal à l'angle donné  $\gamma'$  ; on décrit un arc, de  $b'$  comme centre avec le rayon connu  $b'A''$  ; du point  $n'$ , où cet arc rencontre la droite  $b'r'$ , on tire  $n'a'$  perpendiculaire sur  $b'c'$  ; par le pied  $a'$  de cette perpendiculaire, on tire une perpendiculaire  $a'e$  sur la ligne de terre  $xy$ , et à partir du point  $p$ , où cette perpendiculaire rencontre  $xy$ , on prend sur  $pe$  une longueur  $pa$  égale à  $a'n'$ . Les points  $a'$ ,  $a$ , ainsi déterminés, sont les projections demandées du point  $A$ .

278. Quand le plan  $Z$ , qui contient le point  $A$ , est perpendiculaire à l'un des deux plans de projection, les constructions des nos 276 et 277, deviennent beaucoup plus simples. En voici des exemples :

1<sup>er</sup> EXEMPLE (fig. 248). On connaît la projection horizontale,  $a$ , d'un point  $A$  situé dans un plan  $Z$  perpendiculaire au plan vertical de projection ; la trace verticale  $at'$  du plan  $Z$  est donnée ; il s'agit de construire, la trace horizontale  $at$

du plan Z, la projection verticale  $a'$  du point A, et les rabattemens,  $A''$ ,  $A'$ , du point A sur les plans de projection  $t'ax$ ,  $tax$ .

Le plan Z étant perpendiculaire au plan vertical  $t'ay$ , et le point  $a$  appartenant à la trace cherchée, on obtiendra cette trace en menant par le point  $a$ , une perpendiculaire  $at$  à la ligne de terre  $xy$  (n° 233, 3°).

La projection verticale du point A doit se trouver sur la perpendiculaire  $ae'$  à  $xy$  menée par le point donné  $a$  (n° 235); et il résulte du principe du n° 183, que cette projection est sur la trace verticale  $at'$  du plan Z. Le point  $a'$ , où  $ae'$  rencontre  $at'$ , est donc la projection verticale demandée du point A.

Pour construire le rabattement  $A''$  du point A sur le plan vertical  $t'ax$ , on observe que la perpendiculaire menée de A sur le plan vertical est égale à  $ap$  (n° 233, 4°); d'ailleurs, cette perpendiculaire est dans le plan  $t'at$  (n° 183), son pied est  $a'$ , et elle est perpendiculaire à la trace verticale  $at'$ . Par conséquent, si le plan  $t'at'$  tourne autour de sa trace verticale  $at'$ , lorsqu'il sera rabattu sur le plan vertical  $t'ax$ , le point A se rabattra sur la perpendiculaire  $a'd'$  à  $at'$ , à une distance de  $a'$  égale à  $pa$ ; prenant donc sur  $a'd'$  une longueur  $a'A''$  égale à  $pa$ , le point  $A''$  sera le rabattement cherché du point A sur le plan vertical  $t'ax$ .

Pour construire le rabattement,  $A'$ , du point A sur le plan horizontal  $tax$ , on observe que le point  $a$  étant le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur le plan horizontal  $tay$ , si l'on tire  $ab$  perpendiculaire à  $at$ , la droite  $Ab$ , qui joindrait, dans l'espace, le point A avec le point  $b$ , serait perpendiculaire sur  $at$  (n° 133). Or,  $Ab$  est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés  $ab$ ,  $aA$ , de l'angle droit, sont respectivement égaux à  $pa$  et à  $pa'$ ; la distance de A à  $b$  est donc égale à  $a'a$ . Cela résulte aussi de ce que les droites  $Ab$ ,  $a'a$ , sont deux parallèles comprises entre deux parallèles  $Aa'$ ,  $ba$ . Par conséquent, si le plan  $t'at$  tourne autour de sa trace horizontale  $at$ , quand il sera rabattu sur le plan horizontal  $tax$ , la perpendiculaire  $Ab$  à  $at$ , viendra sur le prolonge-

ment  $bd$  de  $ab$ , et le point  $A$  se rabattra en un point  $A'$  de  $bd$ , à une distance de  $b$  égale à  $aa'$ .

Ainsi, pour construire le rabattement  $A'$  du point  $(a, a')$  sur le plan horizontal, on peut décrire un arc de  $\alpha$  comme centre avec le rayon  $aa'$ ; par le point  $r$ , où cet arc coupe la ligne de terre, on mène une parallèle  $rs$  à la trace  $as$ , et par  $a$  on tire la parallèle  $ad$  à la ligne de terre; les droites  $ad$ ,  $rs$ , se rencontrent en un point  $A'$  qui est le rabattement cherché du point  $(a, a')$  sur le plan horizontal  $tax$ .

**2° EXEMPLE (fig. 249).** On connaît le rabattement  $A'$ , sur le plan horizontal, d'un point  $A$  situé dans le plan  $tax$  perpendiculaire au plan vertical  $xy$ ; il s'agit de construire les projections,  $a, a'$ , du point  $A$ .

Les raisonnemens employés dans le 1<sup>er</sup> exemple, conduisent à la construction suivante : Pour déterminer les projections demandées, par le point donné  $A'$ , on mène des parallèles  $A'r$ ,  $A'f$ , aux droites  $tx$ ,  $xy$ ; on décrit un arc de  $\alpha$  comme centre avec le rayon  $ar$ , et du point  $a'$ , où cet arc coupe la trace verticale  $as'$ , on tire la perpendiculaire  $a'g$  à  $xy$ ; cette perpendiculaire rencontre la droite  $A'f$  en  $a$ . Les points  $a', a$ , ainsi déterminés, sont les projections demandées du point  $A$ .

**3° EXEMPLE (fig. 250).** On connaît le rabattement  $A''$ , sur le plan vertical  $A''xy$ , d'un point  $A$  situé dans un plan  $tax$  perpendiculaire au plan vertical  $A''xy$ ; il s'agit de construire les projections,  $a, a'$ , du point  $A$ .

D'après les raisonnemens employés dans le 1<sup>er</sup> exemple, pour construire les projections demandées, on mène la perpendiculaire  $A''a'$  sur la trace verticale  $as'$ , et du pied  $a'$  de cette perpendiculaire, on abaisse la perpendiculaire  $a'g$  à  $xy$ ; à partir du point  $p$ , où cette perpendiculaire coupe la ligne de terre, on prend sur  $pg$  une longueur  $pa = a'A''$ . Les points  $a', a$ , ainsi déterminés, sont les projections cherchées du point  $A$ .

**REMARQUE.** On opérerait d'une manière analogue, si le plan qui contient le point  $A$  était perpendiculaire au plan horizontal.

279. D'après ce qui précède, lorsqu'on connaîtra l'une des projections d'une courbe située dans un plan donné, les méthodes indiquées (n° 276, 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> cas, et n° 278), fourniront le moyen de construire successivement les différens points de l'autre projection de cette courbe, et de trouver la position que prend cette courbe lorsque son plan tourne autour de l'une de ses traces pour se rabattre sur le plan de projection qui contient cette trace. On obtiendra, de cette manière, la courbe dans sa vraie grandeur.

280. *Réciproquement*, toutes les fois qu'on connaîtra le rabattement, sur l'un des deux plans de projection, d'une courbe située dans un plan donné, les méthodes exposées dans les n° 277 et 278, fourniront le moyen de construire les projections des différens points de cette courbe sur les deux plans de projection.

281. *Lorsqu'on saura résoudre un problème sur des points et des lignes qui sont dans un même plan, les constructions indiquées (n° 276...278) fourniront le moyen de résoudre le même problème, quand les données étant dans un plan Z connu de position dans l'espace, ne seront déterminées que par leurs projections sur deux plans rectangulaires.* A cet effet : nous chercherons les traces du plan Z (n° 245 et 246) ; nous supposerons ensuite que ce plan tourne autour de sa trace horizontale, pour se rabattre sur le plan horizontal ; nous déterminerons les positions, sur le plan Z, ainsi rabattu, des points et des lignes dont les projections étaient données (n° 276). Nous pourrons exécuter sur le plan horizontal, les constructions qui détermineront les positions respectives des inconnues dans le plan que nous avons rabattu ; enfin, nous concevrons que ce dernier plan tourne autour de sa trace horizontale, pour reprendre sa position primitive, et, à l'aide des constructions des n° 277 et 278, nous en déduirons facilement les projections demandées des points et des lignes qu'il s'agissait de déterminer. Appliquons ces considérations générales à des exemples :

**282. 32° PROBLÈME (fig. 251).** *Connaissant les projections des deux côtés d'un angle situé dans l'espace, on propose d'inscrire dans cet angle une droite d'une longueur connue  $\ell$ , qui forme un angle connu  $\delta$  avec l'un des côtés donnés (n° 42).*

Soient  $ab$ ,  $a'b'$ , les projections de l'un des côtés donnés, et  $ac$ ,  $a'c'$ , les projections de l'autre côté; les projections  $a$ ,  $a'$ , du sommet  $A$  de l'angle formé par les côtés donnés, seront sur une perpendiculaire à la ligne de terre  $xy$  (n° 235).

Pour trouver les traces  $at$ ,  $a't'$ , du plan  $Z$  de l'angle formé par les côtés donnés, nous chercherons les points  $b$ ,  $c$ , où ces côtés rencontrent le plan horizontal, et les points  $d'$ ,  $e'$ , où les prolongemens des mêmes côtés rencontrent le plan vertical (n° 244); la droite  $tc$ , menée par les points  $b$ ,  $c$ , sera la trace horizontale du plan  $Z$ , et les trois points  $a$ ,  $d'$ ,  $e'$ , appartenant à la trace verticale du plan  $Z$ , devront être sur une même droite  $a't'$ .

Pour déterminer le rabattement (sur le plan horizontal) des deux côtés donnés, nous concevrons que le plan  $ta't'$  de ces côtés, tourne autour de sa trace horizontale  $at$ ; les points  $b$ ,  $c$ , (où les côtés donnés rencontrent le plan horizontal) resteront fixes, et le sommet  $A$  se rabattra sur la perpendiculaire  $af$  à la trace horizontale  $at$ , à une distance de  $g$  égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont  $ag$  et  $ka'$  (n° 276, 1<sup>er</sup> cas). Pour construire cette hypoténuse, on conduit par  $a$ , une perpendiculaire  $al$  à  $ag$ , sur laquelle on prend  $ah = ka'$ ; la droite  $gh$  est l'hypoténuse cherchée. On décrit un arc, de  $g$  comme centre avec le rayon  $gh$ ; cet arc coupe  $af$  en un point  $A'$  qui est le rabattement cherché du sommet  $A$  sur le plan horizontal. Par conséquent, les droites  $A'b$ ,  $A'c$ , sont les rabattemens sur le plan horizontal, des deux côtés donnés, et  $bA'c$  est la véritable grandeur de l'angle formé, dans l'espace, par ces côtés (\*).

---

(\*) Cette construction s'accorde avec celle qui a été donnée (n° 254, 2<sup>e</sup> méthode), pour déterminer l'angle formé par deux droites situées dans l'espace.

Pour inscrire dans l'angle  $bA'c$ , une droite dont la longueur soit  $\epsilon$  et qui forme l'angle  $\delta$  avec le côté  $A'b$ , on exécute la construction indiquée (page 24, n° 42) : par un point quelconque  $M$  de  $A'b$ , on mène la droite  $MR$ , sous l'angle  $RMA' = \delta$ ; sur  $MR$ , on prend  $MS = \epsilon$ , et par  $S$  on tire une parallèle à  $bA'$  qui rencontre  $A'c$  en  $P'$ ; par le point  $P'$ , on tire une parallèle à  $RM$  qui rencontre  $A'b$  en  $Q'$ ; la droite  $P'Q'$  satisfait à la question, car d'après les propriétés connues des parallèles, on a

$$P'Q' = SM = \epsilon, \text{ et l'angle } P'Q'A' = RMA' = \delta.$$

Pour construire les projections de la droite inscrite dans l'angle formé (dans l'espace) par les côtés donnés, on observe que le rabattement de cette droite sur le plan horizontal étant  $P'Q'$ , si le plan  $A'bc$  tourne autour de la trace horizontale  $at$ , les points  $b, c$ , resteront fixes; les points  $A', P', Q'$ , décriront dans l'espace des arcs de cercle dont les plans seront perpendiculaires à la trace  $at$ . Quand le sommet  $A'$ , de l'angle  $bA'c$ , aura repris la position primitive  $A$  qu'il avait dans l'espace, ses projections seront  $a$  et  $a'$ ; les points  $P', Q'$ , viendront sur les côtés de l'angle donné, en des points  $P, Q$ , dont il s'agit de trouver les projections  $(p, p'), (q, q')$ . Les méthodes du n° 277 (1<sup>er</sup> cas) serviraient à déterminer ces projections. Mais, on peut simplifier cette construction; en effet, le point  $P$  étant sur le côté  $Ac$ , la projection horizontale  $p$ , de  $P$ , doit se trouver sur la projection horizontale  $ac$  de  $Ac$ , et sur la perpendiculaire  $P'n$  à  $at$  (3<sup>e</sup> remarque, page 176); le point  $p$ , où  $P'n$  rencontre  $ac$ , sera donc la projection horizontale de  $P$ . La projection verticale de  $P$  devant se trouver, sur la perpendiculaire  $pz'$  à la ligne de terre  $xy$  (n° 235), et sur la projection verticale  $a'c'$  de  $Ac$ , le point  $p'$ , où  $pz'$  rencontre  $a'c'$ , sera la projection verticale de  $P$ .

Par une raison semblable, pour trouver les projections du point  $Q$ , on tire par  $Q'$  une perpendiculaire à  $at$  qui rencontre  $ab$  en  $q$ ; par  $q$  on tire une perpendiculaire à  $xy$ , qui ren-



contre  $a'b'$  en  $q'$  ; les points  $q, q'$ , sont les projections demandées du point  $Q$ .

Les droites  $pq, p'q'$ , ainsi construites, sont les projections de la ligne  $PQ$  qui jouit des deux propriétés énoncées.

REMARQUE. Pour vérifier si la construction a été faite avec exactitude, on cherchera la vraie grandeur de la droite  $PQ$ , dont les projections sont  $pq$  et  $p'q'$ , cette longueur devra être égale à  $\zeta$  (n° 240); et en déterminant l'angle formé par la droite  $(pq, p'q')$  avec la droite  $(ab, a'b')$ , cet angle devra être égal à l'angle donné  $\delta$  (n° 254).

283. 33<sup>e</sup> PROBLÈME (fig. 252). Deux droites  $AB, AC$ , qui se coupent en  $A$ , étant données de grandeur et de position, dans l'espace, trouver un point  $M$  de leur plan, tel que les trois droites, menées de ce point aux extrémités  $A, B, C$ , des droites données, forment entre elles des angles donnés  $\zeta, \gamma$ .

Soient,  $ab, a'b'$ , les projections de l'une des deux droites données, et  $ac, a'c'$ , les projections de l'autre droite; les trois lignes  $aa', bb'$  et  $cc'$ , seront perpendiculaires à la ligne de terre  $xy$  (n° 235).

Pour construire les traces du plan déterminé par les deux droites données, on cherche les points  $d, e$ , où ces droites, indéfiniment prolongées, rencontrent le plan horizontal, et les points  $f', l'$ , où elles rencontrent le plan vertical (n° 244); la droite  $de$ , menée par les points  $d, e$ , est la trace horizontale du plan cherché, et la droite  $af'$ , menée par les points  $a, f'$ , est la trace verticale de ce plan; le point  $l'$  doit se trouver sur la trace  $af'$ .

Pour construire le rabattement  $M'$  (sur le plan horizontal) du point  $M$  de l'espace qui jouit de la propriété énoncée, on conçoit que le plan  $def$  tourne autour de sa trace horizontale  $de$ ; la construction indiquée (n° 276, 1<sup>er</sup> cas), sert à déterminer les rabattemens  $A', B', C'$ , sur le plan horizontal, des points  $A, B, C$ . La méthode du n° 70, sert ensuite à déterminer le point  $M'$ ; à cet effet, on décrit sur les droites  $A'B', A'C'$ , des segmens capables des angles donnés  $\zeta, \gamma$ ; ces segmens se coupent au point  $M'$  demandé, car en tirant les

droites  $M'A'$ ,  $M'B'$ ,  $M'C'$ , les angles  $A'M'B'$ ,  $A'M'C'$ , sont respectivement égaux aux angles donnés  $\delta$ ,  $\gamma$ .

Enfin, pour construire les projections,  $m$ ,  $m'$ , du point  $M$  qui jouit de la propriété énoncée, et dont le rabattement sur le plan horizontal est  $M'$ , on conçoit que le plan  $M'B'A'C'$  tourne autour de la trace  $at$ ; quand ce plan aura repris sa position primitive  $tat'$ , les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , coïncideront avec les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et le point  $M'$  prendra dans l'espace une position  $M$  qu'il s'agit de déterminer; l'une quelconque des méthodes du n° 277 (1<sup>er</sup> cas), servira à construire les projections  $m$ ,  $m'$ , du point  $M$  demandé.

Si l'on fait usage de la 1<sup>re</sup> méthode, on mènera par le point  $M'$  une perpendiculaire à la trace  $at$ ; par le point  $i$ , où elle rencontre la ligne de terre  $xy$ , on tirera une perpendiculaire à  $xy$  qui rencontre la trace  $at'$  en  $k$ , et l'on mènera  $ik$  parallèle à  $at$ ; du point  $i$  comme centre, avec le rayon  $ik$ , on décrira un arc qui rencontrera  $ik$  en un point  $n$ ; de  $g$  comme centre avec le rayon  $gM'$ , on décrira un arc qui coupe  $gn$  en  $p$ ; le pied  $m$  de la perpendiculaire abaissée de  $p$  sur  $gi$ , sera la projection horizontale du point  $M$  demandé. Pour trouver la projection verticale  $m'$  du point  $M$ , on tirera par  $m$  une perpendiculaire à  $xy$ , et à partir du point  $r$  où elle rencontre  $xy$ , on portera sur cette perpendiculaire une longueur  $rm' = mp$ ; ce qui déterminera le point  $m'$  demandé.

Si la construction a été faite avec exactitude, le point  $m'$  sera sur la projection verticale  $kt$  de l'intersection des plans  $tat'$ ,  $gik$ ; et en cherchant les angles formés par la droite  $(m, m')$  avec les deux droites  $(ab, a'b')$ ,  $(ac, a'c')$ , ces angles devront être respectivement égaux aux angles donnés  $\delta$ ,  $\gamma$ , (n° 254).

284. 34<sup>e</sup> PROBLÈME (fig 253). Par un point  $P$ , donné dans le plan de deux parallèles,  $l$ ,  $l'$ , dont les projections sont connues, mener une droite telle que la partie  $QR$  de cette droite comprise entre ces parallèles soit d'une longueur donnée  $\delta$ .

Soient,  $ab$ ,  $a'b'$ , les projections de  $l$ , et  $cd$ ,  $c'd'$ , les projections de la parallèle  $l'$  à  $l$ .

Pour déterminer les traces  $at$ ,  $at'$ , du plan des parallèles  $l$ ,  $l'$ , on cherche les points  $a$ ,  $c$ ,  $b'$ ,  $d'$ , où ces parallèles rencontrent les plans de projection (n° 244); les droites menées par ces points sont les traces demandées; elles passent par un même point  $a$  de la ligne de terre  $xy$  (n° 230).

Le point donné  $P$  étant dans le plan des parallèles,  $l$ ,  $l'$ , on ne peut prendre arbitrairement que l'une de ses deux projections; soit  $p$  la projection horizontale donnée du point  $P$ .

Pour trouver la projection verticale  $p'$  de  $P$ , on pourrait mener par  $p$  un plan vertical quelconque (n° 248); mais comme le rabattement du point  $P$  sur le plan horizontal, devra se trouver sur la perpendiculaire  $gh$  à  $at$ , menée par  $p$  (3<sup>e</sup> remarque, page 170), on simplifiera la construction en prenant  $gh$  pour la trace horizontale du plan vertical mené par  $p$ ; la trace verticale de ce plan sera la perpendiculaire  $hh'$  à  $xy$  menée par  $h$  (n° 233, 3<sup>e</sup>). Le point  $P$  étant dans chacun des plans  $ghh'$ ,  $at'$ , la projection verticale  $p'$  de  $P$  devra se trouver sur la projection verticale  $e'h'$  de l'intersection de ces deux plans (n° 242), et sur la perpendiculaire à  $xy$  menée par  $p$ ; le point  $p'$ , où cette perpendiculaire rencontre  $e'h'$ , sera donc la projection verticale demandée du point  $P$ .

Pour construire le rabattement  $P'$  du point  $P$  sur le plan horizontal, on mène par  $p$  une perpendiculaire à  $gh$ , sur laquelle on prend  $pf = np'$ ; l'arc décrit du point  $e$  comme centre avec le rayon  $ef$ , coupe  $gh$  au point  $P'$  demandé.

Pour trouver les rabattemens (sur le plan horizontal) des parallèles  $l$ ,  $l'$ , on observe que dans la rotation du plan  $at'$  autour de sa trace horizontale  $at$ , les points  $a$ ,  $c$ , où ces parallèles rencontrent le plan horizontal, restant fixes, il suffit de déterminer le rabattement (sur le plan horizontal) d'un autre point de l'une de ces parallèles; afin de simplifier la construction, nous chercherons le rabattement du point  $d'$  où la droite  $(cd, c'd')$  rencontre le plan vertical; ce rabattement devant se trouver sur la perpendiculaire  $dm$  à  $at$  ( $dd'$  est perpendiculaire sur  $xy$ ) à une distance de  $a$  égale à  $ad'$ , l'arc décrit de  $a$  comme centre avec le rayon  $ad'$ ,

coupera  $dm$  en un point  $D'$  qui sera le rabattement cherché du point  $d'$ . La droite  $cS$ , menée par les points  $c$ ,  $D'$ , sera le rabattement de la droite  $(cd, c'd')$ , sur le plan horizontal, et la parallèle  $aK$  à  $cS$ , menée par  $a$ , sera le rabattement de la droite  $(ab, a'b')$ .

Pour déterminer le rabattement de la sécante demandée (sur le plan horizontal), il suffit de mener par le point  $P'$  une sécante telle que la partie comprise entre les parallèles  $cS$ ,  $aK$ , soit égale à la ligne donnée  $\delta$  (n° 45); à cet effet, d'un point quelconque  $V$  de  $cS$ , pris pour centre, et avec le rayon  $\delta$ , on décrit un arc qui coupe  $aK$  en un point  $H$ ; la parallèle  $P'R'$  à la droite  $HV$ , jouit de la propriété demandée, car les parallèles comprises entre parallèles étant égales, on a  $Q'R' = HV = \delta$ .

Pour construire les projections de la sécante demandée, on conçoit que le plan  $P'at$ , des parallèles  $aK$ ,  $cS$ , tourne autour de la trace  $at$ , pour reprendre sa position primitive  $at'$ ; le point  $P'$  viendra en  $P$ , les parallèles  $aK$ ,  $cS$ , prendront les positions  $l$ ,  $l'$ , et les points  $Q'$ ,  $R'$ , viendront sur les parallèles  $l$ ,  $l'$ , en des points  $Q$ ,  $R$ , dont il s'agit de trouver les projections  $(q, q')$ ,  $(r, r')$ .

La projection horizontale  $q$ , du point  $Q$  de  $l$ , devra se trouver sur la projection horizontale  $ab$  de  $l$ , et sur la perpendiculaire à  $at$  menée par le rabattement  $Q'$  de  $Q$  (3<sup>e</sup> remarque, page 170); le point  $q$ , où cette perpendiculaire rencontre  $ab$ , sera donc la projection horizontale demandée du point  $Q$ . La perpendiculaire à  $xy$ , menée par  $q$ , rencontrera la projection verticale  $a'b'$  de  $l$ , en un point  $q'$  qui sera la projection verticale du point  $Q$ .

On opérera d'une manière semblable, pour trouver les projections  $r$ ,  $r'$ , du point  $R$ .

Quand la construction sera bien faite, les points  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , seront en ligne droite, ainsi que les points  $p'$ ,  $q'$ ,  $r'$ ; les droites  $pqr$ ,  $p'q'r'$ , seront les projections de la sécante demandée, et la vraie grandeur de la droite  $(qr, q'r')$  sera égale à  $\delta$  (n° 240).

REMARQUE. Lorsque la ligne donnée  $\delta$  sera plus grande que

la perpendiculaire  $VF$  abaissée du point  $V$  sur  $aK$ , l'arc décrit de  $V$  comme centre avec le rayon  $\delta$ , coupera  $aK$  en un second point  $G$ ; et la parallèle à la droite  $GV$ , menée par  $P'$ , déterminerait une seconde sécante dont la partie comprise entre les parallèles  $aK$ ,  $cS$ , serait égale à  $\delta$ ; ce qui fournirait une seconde solution de la question proposée. Lorsque  $\delta$  sera égal à  $VF$ , le problème n'admettra qu'une solution. Enfin, si  $\delta$  est moindre que  $VF$ , le problème sera impossible.

**285. 35<sup>e</sup> PROBLÈME (fig. 254).** *Trois points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , étant donnés, dans l'espace, on propose de déterminer la vraie grandeur de la circonférence qui passe par ces trois points, et de construire les projections des différens points de cette courbe.*

Soient  $(a, a')$ ,  $(b, b')$  et  $(c, c')$ , les projections données des trois points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , situés dans l'espace.

La construction du n<sup>o</sup> 245 sert à déterminer les traces  $at$ ,  $at'$ , du plan qui passe par les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

On conçoit ensuite que le plan  $at$  tourne autour de sa trace horizontale  $at$ , et la construction indiquée (n<sup>o</sup> 276, 1<sup>er</sup> cas) donne les rabattemens  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , (sur le plan horizontal), des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Il est alors facile de trouver le centre  $O'$  de la circonférence qui passe par les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , et de décrire cette courbe.

Pour construire les projections des différens points de la circonférence qui passe par les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , on conçoit que le plan  $A'B'C'$  tourne autour de la trace horizontale  $at$ , et qu'il reprend sa position primitive  $at'$ ; le centre  $O'$ , et tous les points  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$ , etc., de la circonférence  $A'B'C'$ , décrivent des arcs de cercle dont les plans sont perpendiculaires à  $at$ ; les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , viennent en  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; les autres points  $O'$ ,  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$ , etc., viennent coïncider avec le centre  $O$  et avec des points  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , etc., de la circonférence qui passe par les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , de l'espace; l'une quelconque des deux méthodes exposées dans le n<sup>o</sup> 277 (1<sup>er</sup> cas), fournit le moyen de construire les projections  $(o, o')$ ,  $(d, d')$ ,  $(e, e')$ ,  $(f, f')$ , etc., des points  $O$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , etc. On obtient, de cette manière,

les différents points des courbes qui sont les projections de la circonférence qui passe par les points  $A, B, C$ .

1<sup>re</sup> REMARQUE. On n'a conservé sur l'épure que les lignes qui ont servi à construire le rabattement  $A'$  du point  $(a, a')$ , et les projections  $d, d'$ , du point  $D$  dont le rabattement sur le plan horizontal est  $D'$ .

2<sup>e</sup> REMARQUE. La construction précédente fournit une seconde manière de trouver le centre  $S$  de la surface sphérique qui passe par quatre points  $A, B, C, D$ , dont les projections sont données (n° 264). On cherche les projections  $o, o'$ , du centre  $O$  de la circonférence qui passe par les points  $A, B, C$ . Le centre  $S$  de la sphère devant être également distant des points  $A, B, C$ , la perpendiculaire  $l$  au plan  $ABC$ , menée par  $O$ , passera par le centre  $S$  (n° 140); on obtiendra les projections de cette perpendiculaire en menant par  $o$  et  $o'$  des perpendiculaires aux traces du plan  $ABC$  (n° 250). On déterminera de même les projections  $p, p'$ , du centre  $P$  de la circonférence qui passe par les points  $A, B, D$ , et les projections de la perpendiculaire  $l'$  au plan  $ABD$ , menée par  $P$ . Les droites  $l, l'$ , se couperont au point  $S$  demandé. Les projections horizontales des droites  $l, l'$ , se rencontreront en un point  $s$  qui sera la projection horizontale du centre  $S$ ; et les projections verticales des droites  $l, l'$ , se rencontreront en un point  $s'$  qui sera la projection verticale du centre  $S$ . Si la construction a été faite avec exactitude, la droite  $ss'$  sera perpendiculaire sur la ligne de terre (n° 236). De plus, le plan  $Q$  des droites  $l, l'$ , étant perpendiculaire à chacun des plans  $ABC, ABD$  (n° 180), sera aussi perpendiculaire à leur intersection  $AB$  (n° 186); les traces du plan  $Q$  devront donc être respectivement perpendiculaires aux projections de la droite  $AB$  (n° 237).

286. 36<sup>e</sup> PROBLÈME (fig. 255). Trois points  $A, B, C$ , étant donnés dans l'espace, on propose de construire le cercle inscrit dans le triangle formé par les droites qui joignent ces trois points, et de trouver les projections de la circonférence de ce cercle.

point  $a$  décrit, dans le plan horizontal, un arc de cercle dont le centre est  $c$  et dont le rayon est  $ca$ ; les points  $A$ ,  $B$ , décrivent, dans l'espace, des arcs parallèles au plan horizontal, dont les rayons sont égaux à  $ca$ ; les projections verticales de ces arcs sont parallèles à la ligne de terre  $xy$ . Enfin, lorsque le plan qui passe par la verticale  $Cc$  a pris une position parallèle au plan vertical  $c'xy$ , sa trace horizontale est la parallèle  $cd$  à  $xy$ , le point  $a$  vient en  $m$ , sur  $cd$ , à la distance  $cm = ca$ ; la verticale  $aAB$  vient coïncider avec la verticale menée par  $m$  et dont la projection verticale est la perpendiculaire  $mg'$  à  $xy$ ; la circonférence du grand cercle de la sphère situé dans le plan  $Cca$ , devenant parallèle au plan vertical  $c'xy$ , sa projection verticale sera la circonférence  $q'm's'$  décrite de  $c'$  comme centre avec le rayon  $R$  de la sphère. Il suit de là, que les points  $m'$ ,  $n'$ , où la perpendiculaire  $mg'$  à  $xy$  rencontre la circonférence  $q'm's'$ , sont les projections verticales des points  $M$ ,  $N$ , où la verticale élevée en  $m$  rencontre la circonférence du grand cercle de la sphère situé dans le plan  $Ccd$ . Si ce dernier plan tourne autour de la verticale  $Cc$ , pour reprendre sa position primitive  $Cca$ , la verticale  $mMN$  viendra coïncider avec la verticale  $aAB$ ; les points  $M$ ,  $N$ , décriront des arcs parallèles au plan horizontal, dont les projections verticales seront les parallèles  $m'h'$ ,  $n'k'$ , à  $xy$ , et les points  $M$ ,  $N$ , viendront en  $A$  et  $B$ ; les projections verticales demandées des points  $A$ ,  $B$ , doivent donc se trouver sur les parallèles  $m'h'$ ,  $n'k'$ . Mais ces projections sont aussi sur la perpendiculaire  $ac'$  à  $xy$ ; les points  $a'$ ,  $b'$ , où cette perpendiculaire coupe les parallèles  $m'h'$ ,  $n'k'$ , sont donc les projections cherchées des points  $A$ ,  $B$ , de la surface sphérique.

Ainsi, pour construire, par cette seconde méthode, les projections verticales des deux points de la surface sphérique dont la projection horizontale est le point donné,  $a$ , on décrit un arc, de  $c$  comme centre avec le rayon  $ca$ ; cet arc coupe la parallèle  $cd$  à la ligne de terre  $xy$ , en un point  $m$ ; on tire la perpendiculaire  $mg'$  à  $xy$ ; par les points  $m'$ ,  $n'$ , où cette

perpendiculaire rencontre la circonférence décrite de  $c'$  comme centre avec le rayon de la sphère, on mène des parallèles  $m'h'$ ,  $n'k'$ , à  $xy$ ; ces parallèles coupent la perpendiculaire  $ac'$  à  $xy$ , en des points  $a'$ ,  $b'$ , qui sont les projections verticales demandées des deux points de la surface sphérique dont la projection horizontale commune est  $a$ .

**288. 38° PROBLÈME** (fig. 258). *On propose de construire le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface d'une sphère dont le centre ( $c$ ,  $c'$ ) et le rayon  $R$  sont donnés.*

Soient  $a$  et  $b$  les projections horizontales des deux points de la surface sphérique. La verticale élevée en  $a$  rencontrera la surface sphérique en deux points dont on déterminera les projections verticales  $a'$ ,  $a''$ , par l'une quelconque des deux méthodes du n° 287 (on a fait usage dans la figure 258 de la 2<sup>e</sup> méthode). On construira de même les projections verticales  $b'$ ,  $b''$ , des points de la surface sphérique dont la projection horizontale commune est  $b$ .

Cela posé : pour déterminer le plus court chemin (sur la sphère) du point ( $a$ ,  $a'$ ) au point ( $b$ ,  $b'$ ), on observe que cette ligne étant l'arc de grand cercle qui joint ces deux points (n° 209), la question se réduit à construire les projections de cet arc. Pour y parvenir, on cherche les traces  $at$ ,  $a't'$ , du plan qui passe par les trois points ( $a$ ,  $a'$ ), ( $b$ ,  $b'$ ), ( $c$ ,  $c'$ ), (n° 245); on conçoit ensuite que ce plan tourne autour de sa trace horizontale  $at$ , et l'on construit les rabattemens  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , de ces trois points sur le plan horizontal (n° 276, 1<sup>er</sup> cas); si la construction a été faite avec exactitude, les distances de  $C'$  aux points  $A'$ ,  $B'$ , seront égales au rayon  $R$  de la sphère; l'arc  $A'M'B'$ , décrit de  $C'$  comme centre avec le rayon  $R$ , sera le rabattement, sur le plan horizontal, du plus court chemin demandé. Pour construire les projections de cette ligne, on concevra que le plan  $C'at$  tourne autour de la trace  $at$ , pour reprendre sa position primitive  $Cat$ ; l'arc  $A'M'B'$ , viendra coïncider avec l'arc de grand cercle qui joint le point ( $a$ ,  $a'$ ) au point ( $b$ ,  $b'$ ); et l'une quelconque des méthodes du n° 277 (1<sup>er</sup> cas) servira à déter-



miner les projections  $(m, m')$ ,  $(n, n')$ , etc., des différens points,  $M, N$ , etc., de ce dernier arc.

**289. 39<sup>e</sup> PROBLÈME** (fig. 259). *Connaissant la projection horizontale,  $a$ , d'un point  $A$  situé sur une surface de révolution dont l'axe et la génératrice sont donnés, construire la projection verticale,  $a'$ , du point  $A$  de cette surface.*

Nous supposerons que l'axe de la surface de révolution est vertical et que tous les points de la *génératrice* sont dans un plan qui passe par l'axe. Tout plan conduit par l'axe, coupera la surface de révolution suivant une ligne qui sera égale à la génératrice; chaque point de la génératrice décrira un arc de cercle dont le centre sera le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe et dont le plan sera horizontal; de sorte que la projection verticale de cet arc sera une parallèle à la ligne de terre  $xy$ .

L'axe étant perpendiculaire au plan horizontal, sa projection horizontale est un point  $c$ , et sa projection verticale est la perpendiculaire  $cf'$  à la ligne de terre  $xy$ . Cela posé: si l'on conçoit un plan  $Z$  qui passe par l'axe et par le point  $a$ , ce plan coupera la surface de révolution suivant une génératrice; la verticale élevée en  $a$ , rencontrera cette génératrice au point  $A$  dont il s'agit de trouver la projection verticale  $a'$ . On obtient cette projection à l'aide de raisonnemens semblables à ceux dont on a fait usage dans la 2<sup>e</sup> méthode du n<sup>o</sup> 287; on conçoit que le plan  $Z$  tourne autour de l'axe de révolution; le point  $a$  décrit, dans le plan horizontal, un arc dont le centre est  $c$  et dont le rayon est  $ca$ ; le point  $A$  décrit, dans l'espace, un arc horizontal dont le rayon est égal à  $ca$ . Enfin, lorsque le plan  $Z$  a pris une position parallèle au plan vertical de projection, sa trace horizontale est la parallèle  $cd$  à  $xy$ , le point  $a$  vient en  $m$ , sur  $cd$ , à la distance  $cm = ca$ , la verticale  $aA$  vient coïncider avec la verticale menée par  $m$  et dont la projection verticale est la perpendiculaire  $mg'$  à  $xy$ ; la génératrice, située dans le plan  $Z$ , ayant pris une position parallèle au plan vertical de projection, sa projection verticale  $q'm's'$  est connue, car elle est égale à cette même génératrice. Il suit

de là que le point  $m'$ , où la perpendiculaire  $mg'$  à  $xy$ , rencontre la génératrice  $q'm's'$ , est la projection verticale du point  $M$ , où la verticale élevée en  $m$  rencontre la génératrice située dans le plan vertical conduit par  $cd$ . Si ce dernier plan tourne autour de l'axe de révolution ; pour reprendre sa position primitive  $Aac$ , la verticale  $mM$  viendra coïncider avec la verticale  $aA$  ; le point  $M$  décrira un arc horizontal dont la projection verticale sera la parallèle  $m'h'$  à  $xy$ , et  $M$  viendra en  $A$ . La projection verticale du point  $A$  doit donc se trouver sur la droite  $m'h'$ . Mais cette projection est aussi sur la perpendiculaire  $ae'$  à  $xy$ . Le point  $a'$  d'intersection de ces deux droites sera donc la projection verticale demandée du point  $A$ .

Ainsi, pour *construire la projection verticale du point  $A$ , dont la projection horizontale est le point donné,  $a$* , on décrit un arc de  $c$  comme centre avec le rayon  $ca$  ; cet arc coupe la parallèle  $cd$  à la ligne de terre  $xy$ , en un point  $m$  ; on tire la perpendiculaire  $mg'$  à  $xy$  ; par le point  $m'$ , où cette perpendiculaire rencontre la génératrice  $q'm's'$ , on mène  $m'h'$  parallèle à  $xy$  ; cette parallèle coupe la perpendiculaire  $ae'$  à  $xy$ , en un point  $a'$  qui est la projection verticale cherchée du point  $A$  de la surface de révolution.

1<sup>re</sup> REMARQUE. Le problème du n° 287 n'est qu'un cas particulier du problème général que nous venons de résoudre ; car la sphère peut être engendrée par un demi-cercle qui tourne autour de son diamètre.

2<sup>e</sup> REMARQUE (fig. 260). Lorsque la génératrice est une ligne droite, qui passe par un point fixe  $(c, c')$ , de l'axe vertical de révolution et qui forme un angle constant  $\gamma$  avec cet axe, la surface de révolution devient un cône droit. Le plan, mené par l'axe parallèlement au plan vertical  $c'xy$ , coupe la surface du cône suivant une génératrice qui forme l'angle  $\gamma$  avec l'axe ; on obtient la projection verticale de cette génératrice, en tirant par le point  $c'$  une droite  $c's'$  sous l'angle  $qc's' = \gamma$ . Le plan horizontal coupe la surface du cône suivant une circonférence dont le centre est  $c$  et dont le rayon est égal à  $qs'$ .

La construction qui vient d'être indiquée fournit le moyen

de trouver la projection verticale  $a'$ , du point de la surface du cône dont la projection horizontale est le point donné  $a$ .

**290. 40<sup>e</sup> PROBLÈME.** *Connaissant les projections  $(a, a')$ ,  $(b, b')$ ,  $(c, c')$ ,  $(d, d')$ ,  $(e, e')$ , etc., de plusieurs points A, B, C, D, E, etc., de l'espace, reconnaître si tous les points A, B, C, D, E, etc., sont dans un même plan.*

On cherchera d'abord les traces du plan P qui passe par les trois points A, B, C (n° 245). Par la projection verticale  $d'$  du point D, on concevra une perpendiculaire au plan vertical de projection, et l'on déterminera la projection horizontale du point de rencontre de cette perpendiculaire avec le plan P (n° 247); pour que le point D soit dans le plan P, il faut et il suffit que la projection horizontale de D (ainsi déterminée), coïncide avec la projection donnée  $d$ .

On reconnaîtra de même, si le point E est dans le plan P; et ainsi de suite.

## NOTES.

### *Note sur le n° 242.*

**291.** Les constructions indiquées (n° 242) pour déterminer l'intersection de deux plans sont en défaut, lorsque les traces de ces plans passent par un même point de la ligne de terre, et lorsque les traces horizontales ou verticales se coupent en un point qui sort des limites de la feuille sur laquelle on veut tracer l'épure. Dans ces deux cas, pour trouver l'intersection des plans dont les traces sont données, on coupe ces plans par un plan auxiliaire que l'on dispose de manière que ses intersections avec les deux plans donnés se rencontrent en un point dont les projections ne sortent pas des limites de l'épure; ce point appartient à l'intersection demandée.

**1<sup>er</sup> CAS** (fig. 261 et 262). Soient  $at, at'$ , les traces de l'un des plans, et  $aT, aT'$ , les traces de l'autre plan. Ces plans passant par le point  $a$ , les projections de leur intersection passeront aussi par ce point; il suffit donc de trouver les projections d'un autre point de cette intersection.

**1<sup>re</sup> MÉTHODE** (fig. 261). On coupe les plans  $tat'$ ,  $TaT$ , par un plan auxiliaire  $cfc'$ . On construit les projections  $bd, b'd'$ , de l'intersection  $db'$  des plans  $cfc'$ ,  $tat'$ , et les projections  $eg, e'g'$ , de l'intersection  $ge'$  des

plans  $cCc'$ ,  $TaT'$ . Les droites  $bd$ ,  $eg$ , se coupent en  $a$ ; les droites  $b'd'$ ,  $e'g'$ , se coupent en  $a'$ ; et les points  $a$ ,  $a'$ , ainsi déterminés, sont les projections du point de rencontre des droites  $db'$ ,  $ge'$ ; le point  $(a, a')$  appartient à l'intersection demandée des plans  $tat'$ ,  $TaT'$ . Les droites  $af$ ,  $a'f'$ , menées du point  $a$  aux points  $a$ ,  $a'$ , sont les projections de l'intersection des plans  $tat'$ ,  $TaT'$ .

2<sup>e</sup> MÉTHODE (fig. 262). Par un point quelconque  $C$  de la ligne de terre  $xy$ , on mène un plan  $V$  perpendiculaire à cette ligne; la trace horizontale du plan  $V$  est la perpendiculaire  $Cc$  à  $xy$ , et sa trace verticale est la perpendiculaire  $Cc'$  à  $xy$ . Le plan  $V$  coupe les plans  $tat'$ ,  $TaT'$ , suivant deux droites  $l$ ,  $l'$ ; et ces droites se rencontrent en un point  $A$  qui appartient à l'intersection des plans  $tat'$ ,  $TaT'$ .

Pour obtenir les projections du point  $A$ , on conçoit d'abord que le plan  $V$  tourne autour de sa trace horizontale  $Cc$ , et l'on cherche les rabattemens  $dB'$ ,  $gE'$ , des intersections  $l$ ,  $l'$ , sur le plan horizontal  $cCy$ ; les droites  $dB'$ ,  $gE'$ , se coupent en un point  $A'$  qui est le rabattement de  $A$ ; et l'on en déduit facilement les projections du point  $A$ . Nous allons exécuter ces constructions.

L'intersection des plans  $cCc'$ ,  $tat'$ , est la droite  $l$ , qui rencontre le plan horizontal en  $d$ , et le plan vertical en  $b'$ ; cette intersection est donc l'hypoténuse d'un triangle dont les deux côtés de l'angle droit sont  $Cd$ ,  $Cb'$ . De même, la droite  $l'$ , qui rencontre les plans de projection aux points  $g$ ,  $e'$ , est l'hypoténuse du triangle dont les deux côtés de l'angle droit sont  $Cg$  et  $Ce'$ .

Si le plan  $V$  tourne autour de sa trace horizontale  $Cc$ , les points  $d$ ,  $g$ , des droites  $l$ ,  $l'$ , resteront fixes; les points  $b'$ ,  $e'$ , de ces droites, décrivant dans le plan vertical  $c'Cy$ , des arcs dont le centre commun sera  $C$  et dont les rayons seront  $Cb'$ ,  $Ce'$ ; les points  $B'$ ,  $E'$ , où ces arcs coupent la ligne de terre, seront les rabattemens des points  $b'$ ,  $e'$ , sur le plan horizontal  $cCy$ ; et par suite, les droites  $dB'$ ,  $gE'$ , seront les rabattemens des intersections  $l$ ,  $l'$ . Le point  $A'$ , où les droites  $dB'$ ,  $gE'$ , se rencontrent, sera donc le rabattement de l'intersection  $A$  des lignes  $l$ ,  $l'$ .

Enfin, si le plan  $cCy$  tourne autour de la trace  $Cc$ , pour reprendre sa position  $V$ , perpendiculaire à  $xy$ , les droites  $dB'$ ,  $gE'$ , viendront coïncider avec les intersections  $l$ ,  $l'$ ; le point  $A'$  viendra coïncider avec le point  $A$  dont la projection horizontale sera le pied  $a$  de la perpendiculaire abaissée de  $A'$  sur la trace  $Cc$ . La distance  $Aa$ , du point  $A$  au plan horizontal, étant égale à  $A'a$ , on obtiendra la projection verticale  $a'$  de  $A$ , en prenant sur  $Cc'$  une longueur  $Ca' = aA'$ .

Ainsi, pour construire, par cette seconde méthode, les projections de l'intersection de deux plans  $tat'$ ,  $TaT'$ , qui passent par un même point  $a$  de la ligne de terre  $xy$ , on tire une perpendiculaire quelconque  $cC$  à  $xy$ , qui rencontre les droites  $at'$ ,  $aT'$ ,  $xy$ ,  $at$ ,  $aT$ , en des points  $b'$ ,  $c'$ ,  $C$ ,  $d$ ,  $g$ ; on décrit des arcs de  $C$  comme centre avec les rayons  $Cb'$ ,

$Cc'$ ; ces arcs rencontrent la ligne de terre en des points  $B'$ ,  $E'$ ; par le point  $A'$  d'intersection des droites  $dB'$ ,  $gE'$ , on tire des perpendiculaires  $A'a$ ,  $A'p$ , aux lignes  $Cc$ ,  $Cy$ ; on décrit un arc de  $C$  comme centre avec le rayon  $Cp$ ; cet arc rencontre la droite  $Cc'$  en  $a'$ . La droite  $af$ , menée par les points  $a$ ,  $a'$ , est la projection horizontale de l'intersection des plans  $ta't'$ ,  $TaT'$ ; et la droite  $af'$ , menée par les points  $a$ ,  $a'$ , est la projection verticale de cette même intersection.

2<sup>e</sup> CAS. 1<sup>re</sup> MÉTHODE (fig. 263). Soient,  $at$ ,  $at'$ , les deux traces de l'un des plans donnés, et  $CT$ ,  $CT'$ , les deux traces de l'autre plan. La position du plan auxiliaire  $V$  étant arbitraire, nous le supposons parallèle au plan vertical de projection; sa trace horizontale sera une parallèle  $cd$  à la ligne de terre  $xy$ ; il coupera les plans  $ta't'$ ,  $TCT'$ , suivant des droites  $l$ ,  $l'$ , qui concourront vers un même point  $A$  de l'intersection demandée des plans  $ta't'$ ,  $TCT'$ . Les droites  $l$ ,  $l'$ , rencontrent le plan horizontal aux points  $c$ ,  $d$ , dont les projections verticales sont les pieds  $c'$ ,  $d'$ , des perpendiculaires menées des points  $c$ ,  $d$ , sur  $xy$ ; de sorte que les points  $c'$ ,  $d'$ , appartiennent respectivement aux projections verticales des droites  $l$ ,  $l'$ . Mais les lignes  $l$ ,  $l'$ , étant respectivement parallèles aux traces verticales  $at'$ ,  $CT'$  (n<sup>o</sup> 153), leurs projections verticales sont aussi parallèles à ces mêmes traces (n<sup>o</sup> 223); on obtiendra donc les projections verticales des droites  $l$ ,  $l'$ , en conduisant par  $c'$  et  $d'$  des parallèles  $c'g'$ ,  $d'h'$ , aux traces verticales  $at'$ ,  $CT'$ . Les droites  $c'g'$ ,  $d'h'$ , se rencontrent en un point  $a'$  qui est la projection verticale d'un point  $A$  de l'intersection des plans  $ta't'$ ,  $TCT'$ . Le point  $A$  étant dans le plan vertical  $V$  dont la trace horizontale est  $cd$ , la projection horizontale de  $A$  est sur  $cd$ ; la perpendiculaire à  $xy$ , menée par  $a'$ , rencontre  $cd$  en un point  $a$  qui est la projection horizontale du point  $A$  (n<sup>o</sup> 235).

Ainsi, pour trouver les projections d'un point de l'intersection des plans  $ta't'$ ,  $TCT'$ , on tire une parallèle quelconque à la ligne de terre  $xy$ ; par les points,  $c$ ,  $d$ , où cette parallèle rencontre les traces horizontales  $at$ ,  $CT$ , on mène des perpendiculaires à  $xy$ , et par les pieds  $c'$ ,  $d'$ , de ces perpendiculaires, on conduit des parallèles  $c'g'$ ,  $d'h'$ , aux traces verticales  $at'$ ,  $CT'$ ; par le point d'intersection  $a'$  des droites  $c'g'$ ,  $d'h'$ , on tire une perpendiculaire à  $xy$  qui rencontre  $cd$  en  $a$ ; les points  $a'$ ,  $a$ , ainsi déterminés, sont les projections demandées d'un point  $A$  de l'intersection des plans  $ta't'$ ,  $TCT'$ .

On trouvera de même les projections  $b$ ,  $b'$ , d'un second point  $B$  de l'intersection des plans  $ta't'$ ,  $TCT'$ , en menant un autre plan parallèle au plan vertical de projection.

Les droites  $ab$ ,  $a'b'$ , indéfiniment prolongées, seront les projections demandées de l'intersection des plans  $ta't'$ ,  $TCT'$ .

On pourrait aussi déterminer les projections de l'intersection des plans  $ta't'$ ,  $TCT'$ , en coupant ces plans par deux plans auxiliaires parallèles au plan horizontal.

**REMARQUE.** Pour qu'un plan auxiliaire, mené parallèlement à l'un des plans de projection, détermine un point de l'intersection des deux plans donnés, il faut et il suffit que ce plan auxiliaire coupe les deux traces horizontales ou verticales des plans donnés suivant des lignes dont les projections verticales ou horizontales se rencontrent en un point qui ne sorte pas des limites de la feuille sur laquelle on veut tracer l'épure. Lorsque les traces des plans donnés seront disposées de manière qu'aucun plan auxiliaire, parallèle à l'un des plans de projection, ne pourra satisfaire à la condition que nous venons d'indiquer, il faudra recourir à la méthode suivante :

**2<sup>e</sup> MÉTHODE.** Par la ligne de terre  $xy$  (fig. 264), on mène un plan auxiliaire quelconque; il coupe les plans donnés  $ta't'$ ,  $T\zeta T'$ , suivant deux droites  $aK$ ,  $\zeta R$  (situées dans l'espace), qui passent respectivement par les points connus  $a$ ,  $\zeta$ , et qui se rencontrent en un certain point  $M$  de l'intersection cherchée  $AB$  des plans  $ta't'$ ,  $T\zeta T'$ . Pour trouver un autre point de chacune des droites  $aK$ ,  $\zeta R$ , on mène arbitrairement un plan  $V$  parallèle au plan vertical de projection; sa trace horizontale est une parallèle  $pq$  à  $xy$  (n° 230); il coupe le plan  $aMc$  suivant une droite  $PQ$  qui est parallèle à  $xy$ , car  $pq$  étant parallèle à  $xy$ , si par un point quelconque de l'intersection  $PQ$  des plans  $PQxy$ ,  $PQpq$ , on tirait une parallèle à  $xy$ , cette droite, qui serait aussi parallèle à  $pq$  (n° 136), serait tout entière dans chacun de ces deux plans (n° 123). Le plan  $V$  rencontre les droites  $aK$ ,  $\zeta R$ , en des points  $E$ ,  $F$ , situés dans l'espace. Chacun des points  $c$ ,  $E$ , se trouvant à la fois dans le plan  $PQpq$  et dans le plan  $ta't'$ , la droite  $cG$  qui passe par  $c$  et  $E$ , est l'intersection de ces deux plans. Cette intersection est parallèle à la trace verticale  $at'$  du plan  $ta't'$  (n° 153). Par une raison semblable, la droite  $dH$ , menée par les points  $d$ ,  $F$ , est l'intersection des plans  $PQpq$ ,  $T\zeta T'$ , et cette intersection est parallèle à la trace verticale  $\zeta T'$  du plan  $T\zeta T'$ .

Nous allons faire voir, dans la figure 265, comment on peut construire les projections des droites  $PQ$ ,  $cG$ ,  $dH$  (fig. 264), situées dans l'espace; nous en déduirons successivement les projections des points  $E$ ,  $F$ , où la première droite coupe les deux autres, et les projections des droites  $aK$ ,  $\zeta R$ ; les droites  $aK$ ,  $\zeta R$ , se rencontreront en un point  $M$  qui appartiendra à l'intersection cherchée des plans  $ta't'$ ,  $T\zeta T'$ .

Les droites  $PQ$ ,  $cG$ ,  $dH$ , étant dans le plan vertical dont la trace horizontale est  $pq$ , leurs projections horizontales se confondent avec cette trace.

La droite  $PQ$  étant parallèle à la ligne de terre  $xy$ , sa projection verticale est parallèle à  $xy$  (n° 223). D'ailleurs, chacun des plans  $Mac$ ,  $EFcd$ , pouvant prendre une infinité de positions, il est facile de les disposer de manière que les projections du point  $M$  ne sortent pas des limites de la feuille sur laquelle on trace l'épure, et une parallèle quelconque  $p'q'$  à  $xy$  peut être considérée comme la projection verticale de la droite  $PQ$ .

On vient de voir que les droites  $cG$ ,  $dH$ , sont, respectivement paral-

(pages 176 et 177); à cet effet, on tire par  $g$ , la perpendiculaire  $gr$  à  $SB$  et la perpendiculaire  $gH'$  à  $gr$ ; par le pied  $r$  de la perpendiculaire  $gr$ , on mène la droite  $rK$ , sous l'angle  $grK = C$ ; les lignes  $gH'$ ,  $rK$ , se coupent en un point  $m$ ; on décrit un arc du point  $g$  comme centre avec le rayon connu  $gm$ ; cet arc rencontre la perpendiculaire  $gA$  à  $xy$  en un point  $n$  qui appartient à la trace  $pZ'$  demandée. On trouvera donc cette trace en tirant une droite par les points connus  $p$ ,  $n$ .

Le point  $F'$  devant se trouver sur l'arc  $fF''$  et sur la trace  $pZ'$ , sera déterminé par l'intersection de ces deux lignes.

Enfin, si l'on conçoit que le plan  $CSB$  tourne autour de sa trace horizontale  $SB$ , pour se rabattre sur le plan horizontal  $Sxy$ , les distances du point  $F'$  (de  $SC$ ) aux points fixes  $S$ ,  $p$ , ne changeront pas; et comme on vient de voir que la première de ces distances est égale à  $fS$ , le point  $F'$  se rabattra, sur le plan horizontal, en un point  $f'$  qui sera déterminé par l'intersection des arcs décrits des points  $S$  et  $p$  comme centres avec les rayons connus  $Sf$ ,  $pF'$ . La droite  $SE'$ , menée par les points  $S$ ,  $f'$ , sera donc le rabattement de l'arête  $SC$  sur le plan horizontal, et l'angle  $BSE'$  sera égal à l'angle cherché  $a$ .

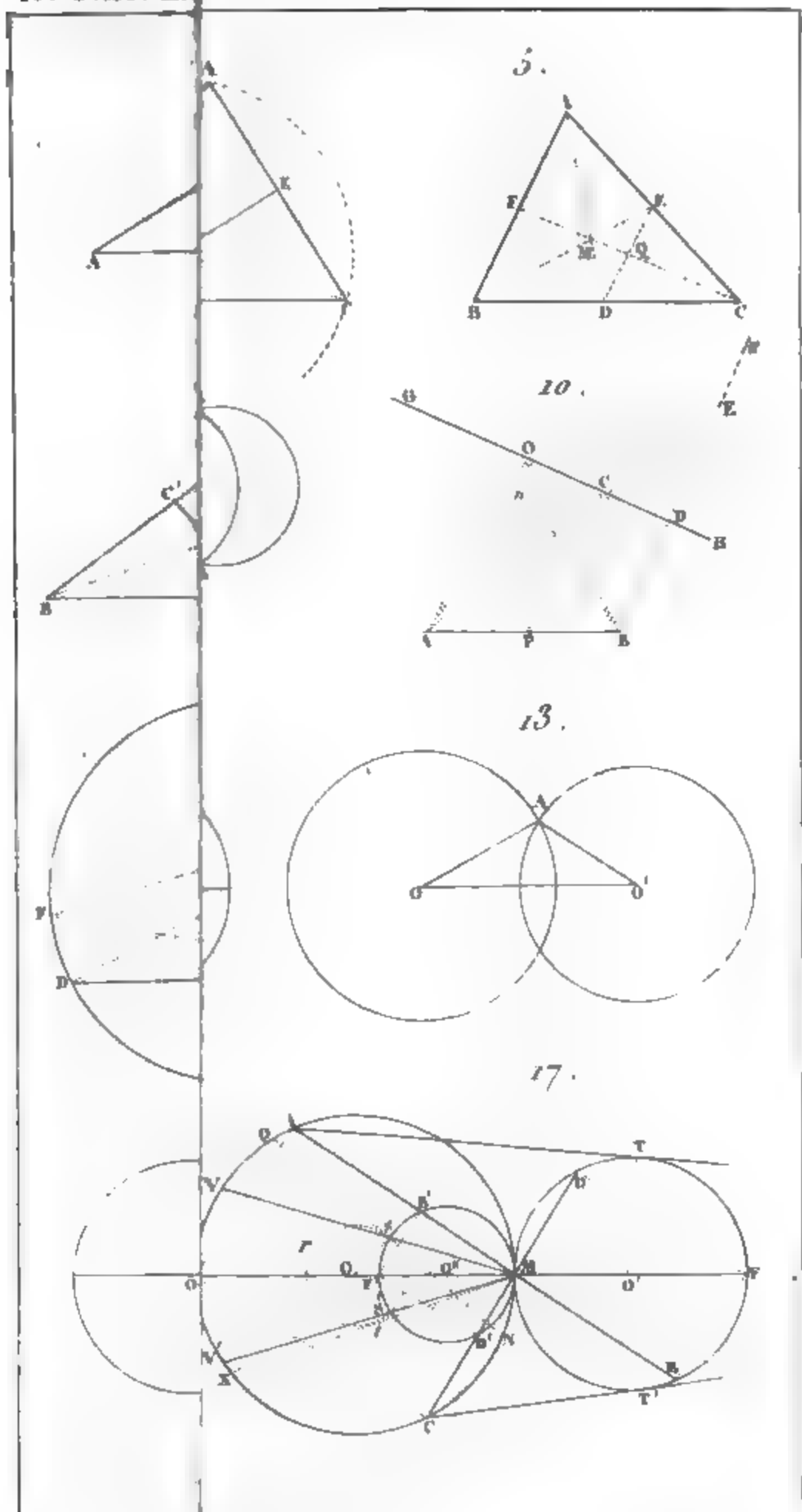
Lorsque les données,  $b$ ,  $c$ ,  $C$ , sont telles qu'on les a supposées dans la figure 267, la circonférence, décrite de  $g$  comme centre avec le rayon  $gi$ , coupe la droite  $pZ'$  en deux points  $F'$ ,  $F''$ ; les circonférences décrites de  $p$  comme centre avec les rayons  $pF'$ ,  $pF''$ , coupent la circonférence décrite de  $S$  comme centre avec le rayon  $Sf$ , en des points  $f'$ ,  $f''$ ; et en tirant les droites  $Sf'E'$ ,  $Sf''E''$ , on obtient deux solutions dans lesquelles les valeurs de la troisième face  $a$  sont  $BSE'$  et  $BSE''$ . De sorte que les données,  $b$ ,  $c$ ,  $C$ , appartiennent à deux pyramides différentes.

Il est facile de voir que ces raisonnemens conduisent à la construction indiquée dans le n° 272.

REMARQUE. Après avoir trouvé le point  $F'$ , où l'arête  $SC$  perce le plan vertical  $F'xy$ , on peut faire usage de la méthode du n° 276 (1<sup>er</sup> cas) pour construire le rabattement  $f'$  de  $F'$ ; car le pied  $v$  de la perpendiculaire abaissée de  $F'$  sur  $xy$  étant la projection horizontale de  $F'$ , le rabattement de  $F'$  sera sur la perpendiculaire  $vd'$  à la trace horizontale  $SB$  du plan  $F'SB$  (page 170, 3<sup>e</sup> remarque); et comme d'après ce qu'on a vu (page 169), la distance de  $d$  à  $F'$ , est l'hypoténuse d'un triangle dont les deux côtés de l'angle droit sont  $vd$  et  $vF'$ , pour obtenir cette distance, on décrira un arc, du point  $v$  comme centre avec le rayon  $vF'$ ; cet arc coupera la perpendiculaire  $vq$  à  $vd'$ , en  $h$ ; la distance  $dF'$  sera égale à l'hypoténuse  $dh$ ; et l'arc, décrit de  $d$  comme centre avec le rayon  $dh$ , rencontrera  $dd'$  au point  $f'$  demandé.

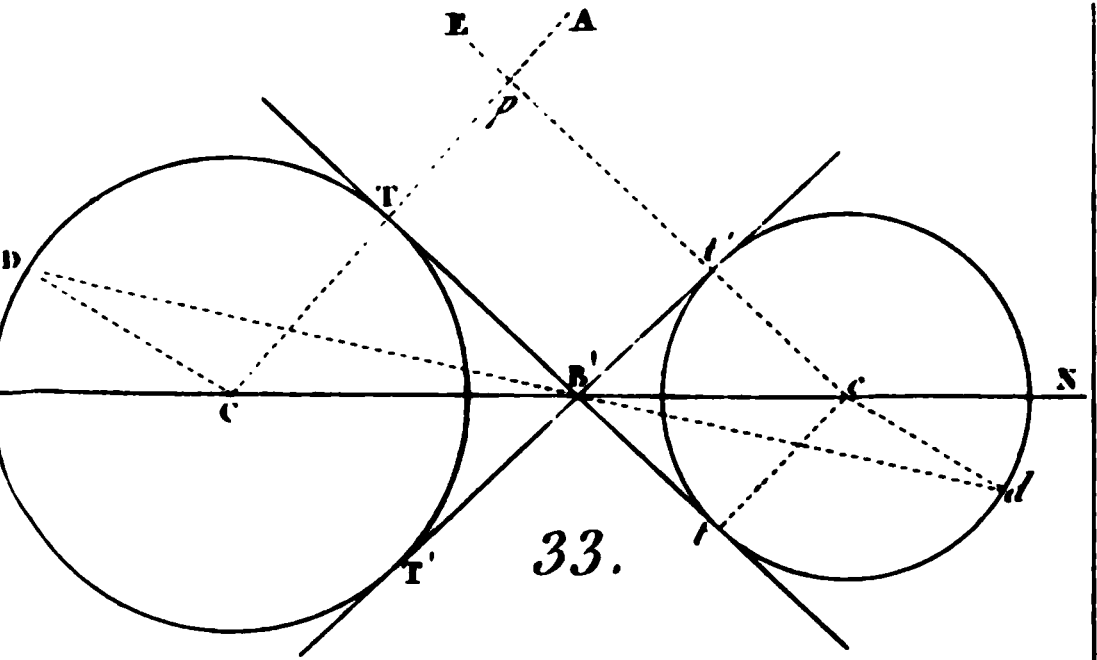
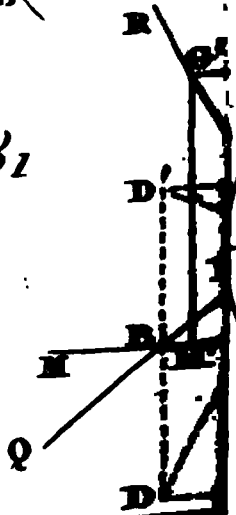
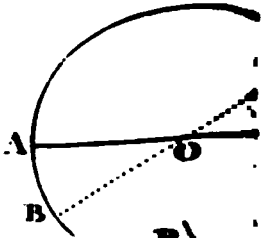
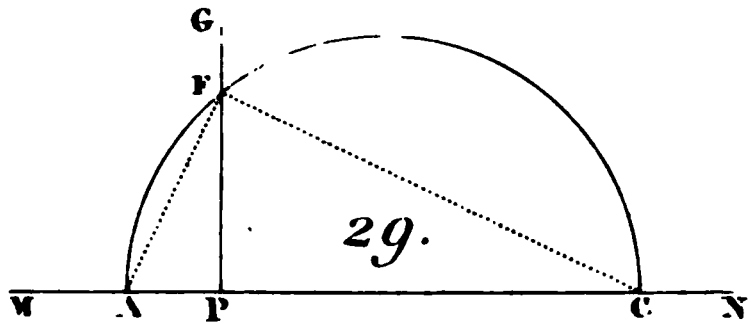
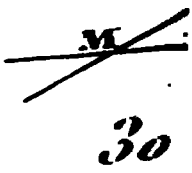
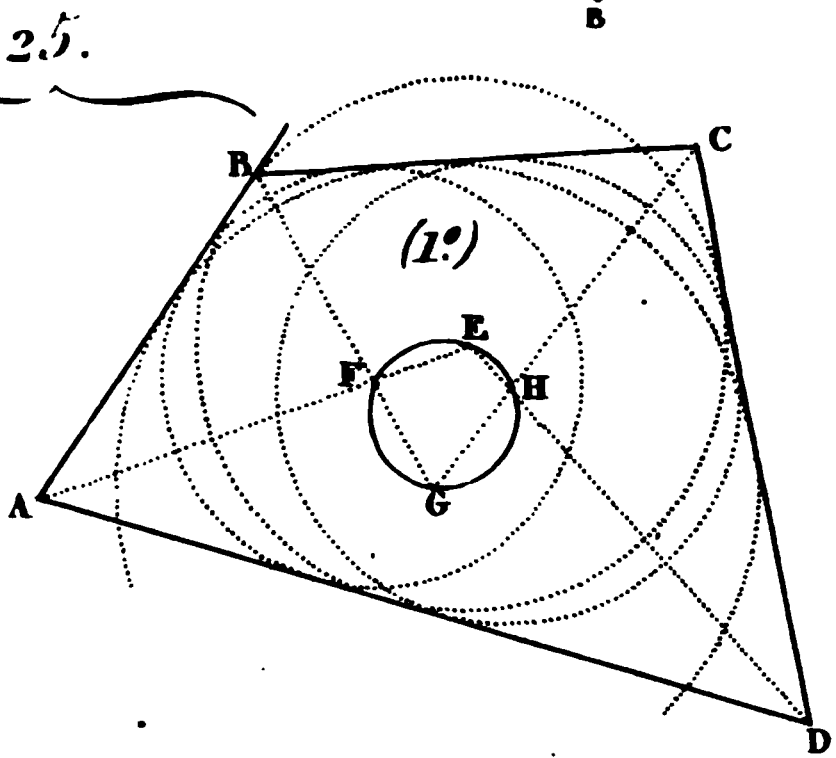
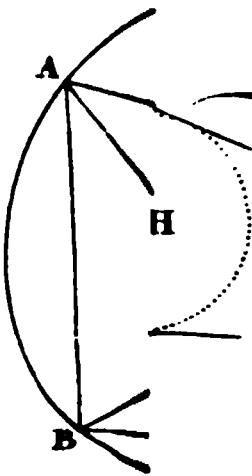
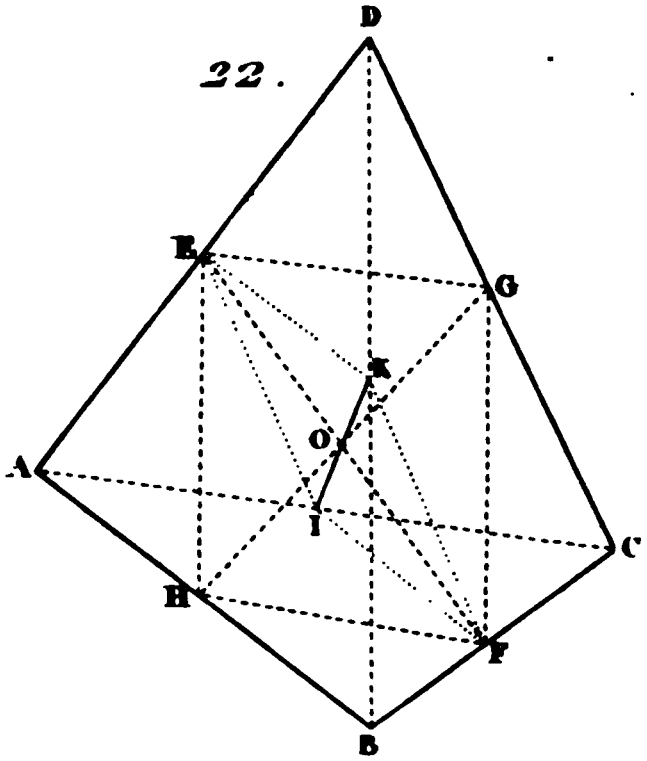
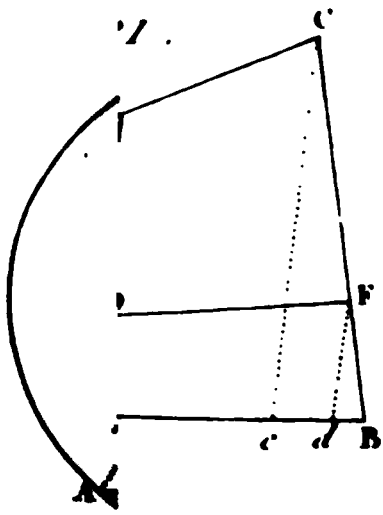
Les angles plans  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , étant connus, le procédé du n° 268 servira à construire les angles dièdres  $\alpha$ ,  $\gamma$ .

FIN.





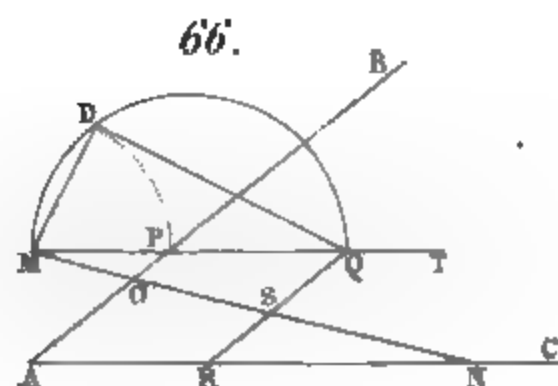
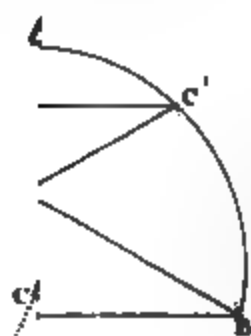
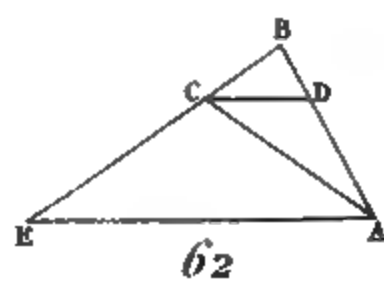
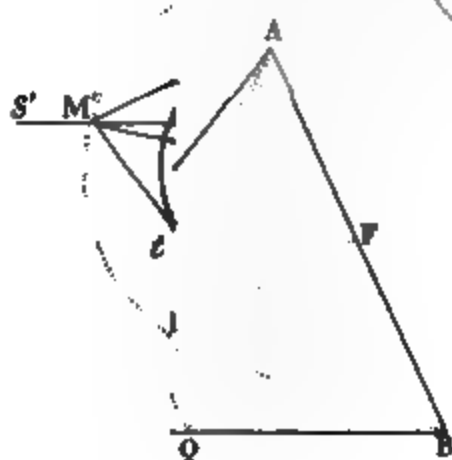
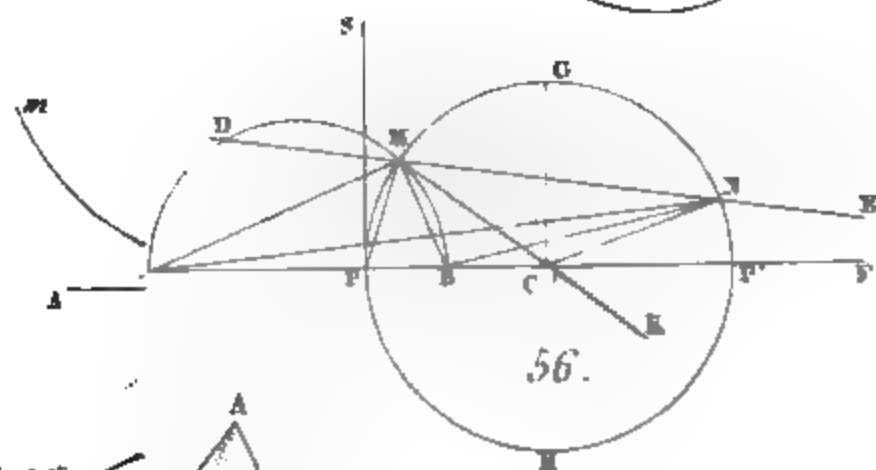
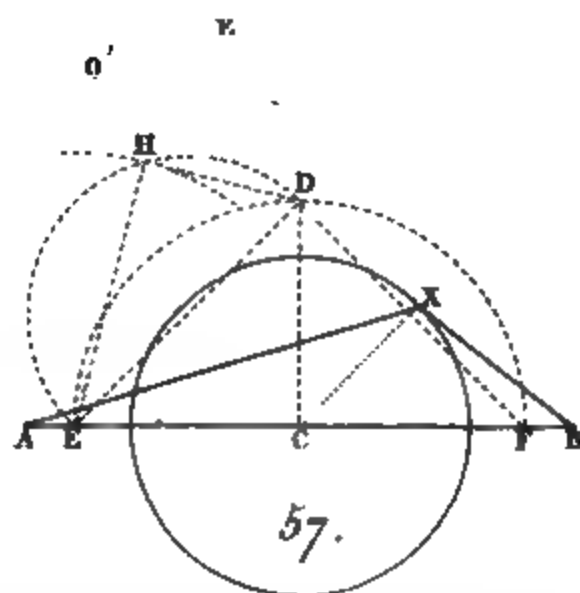
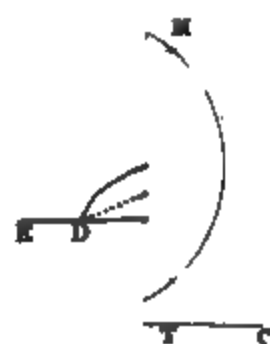




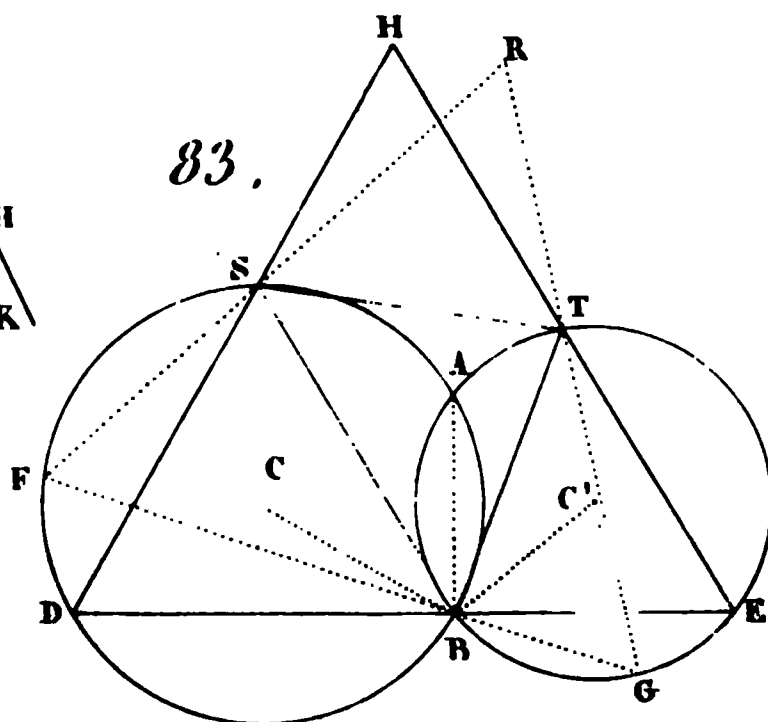
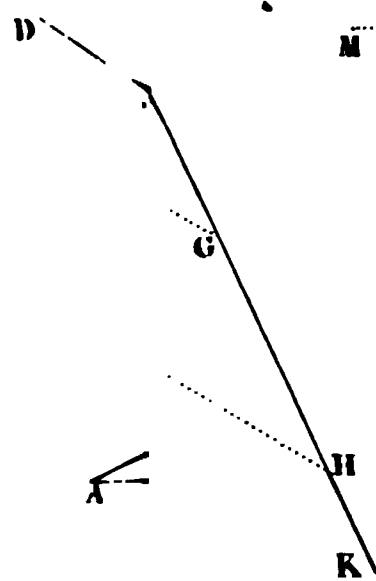
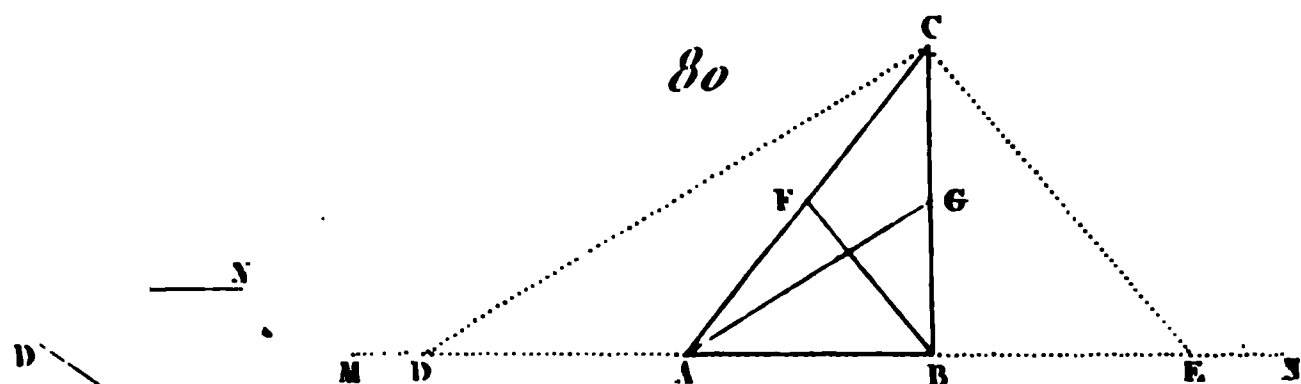
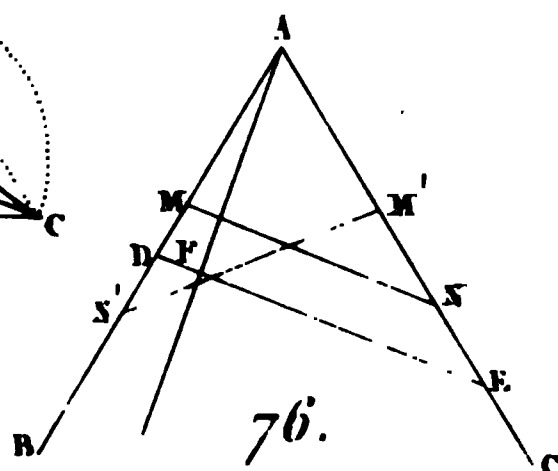
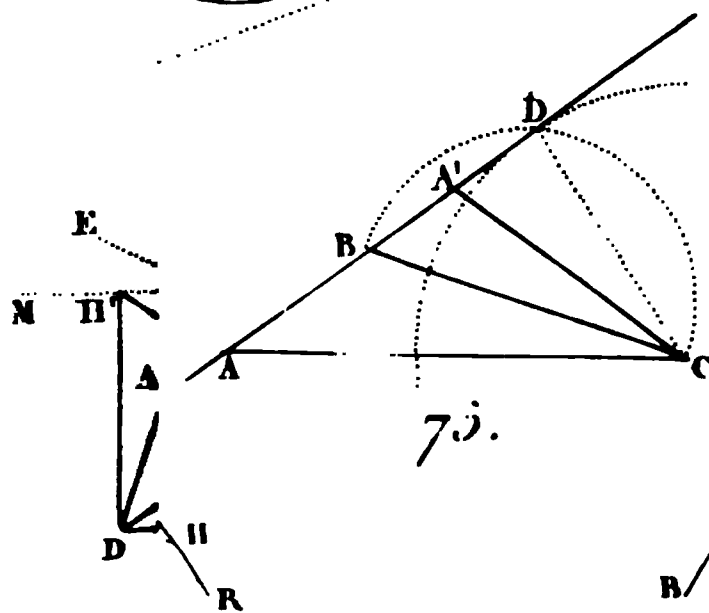
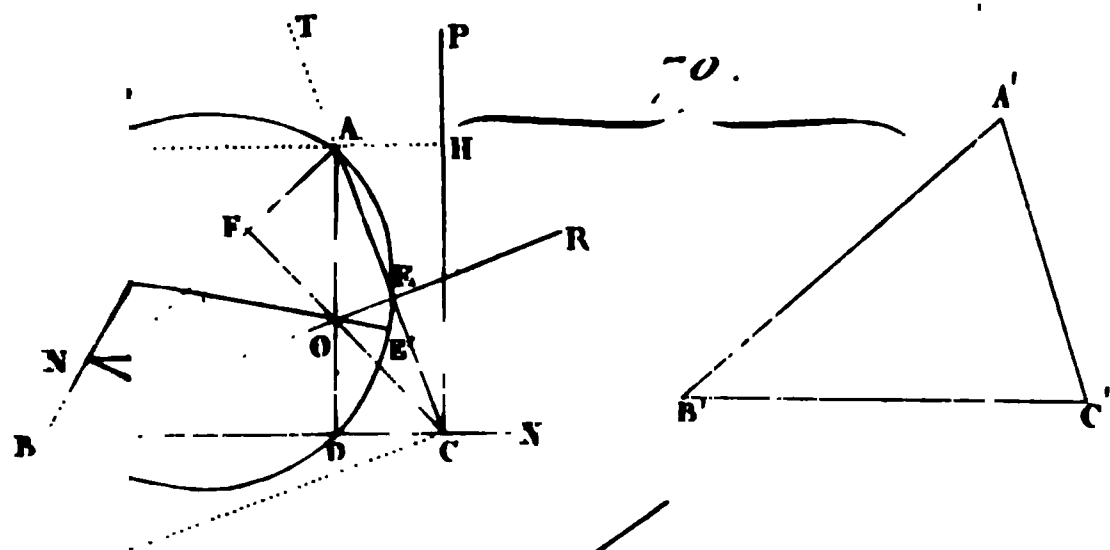








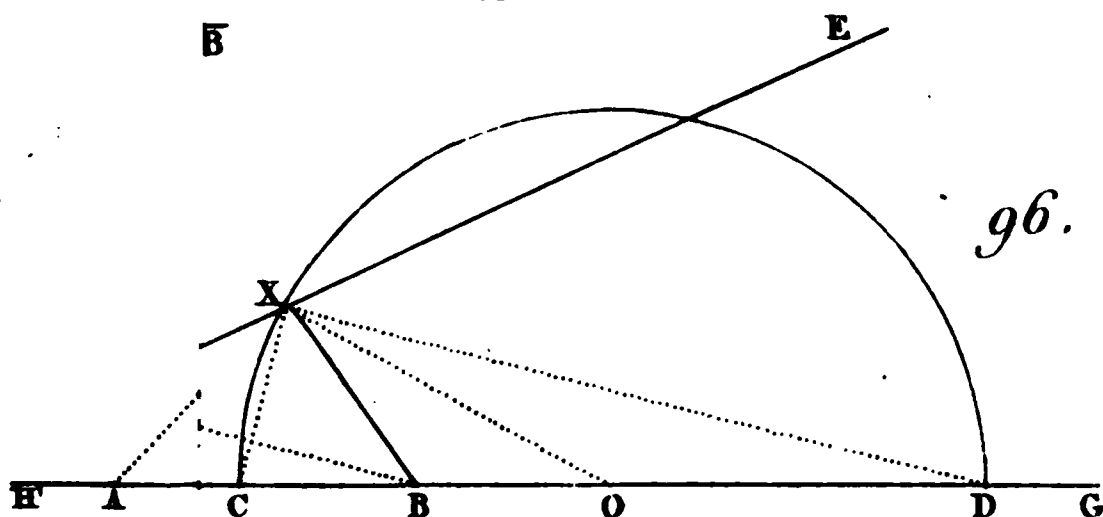
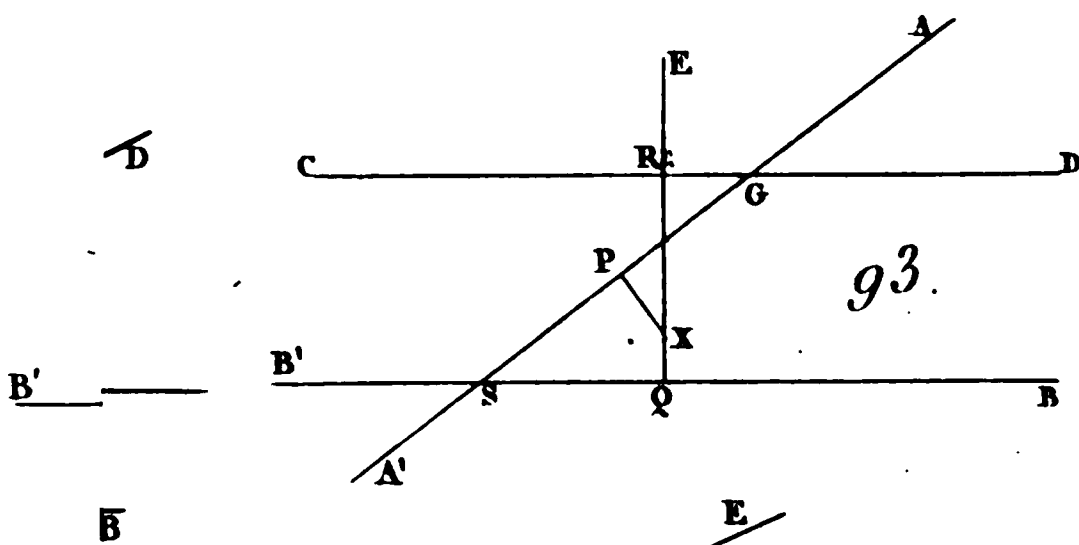
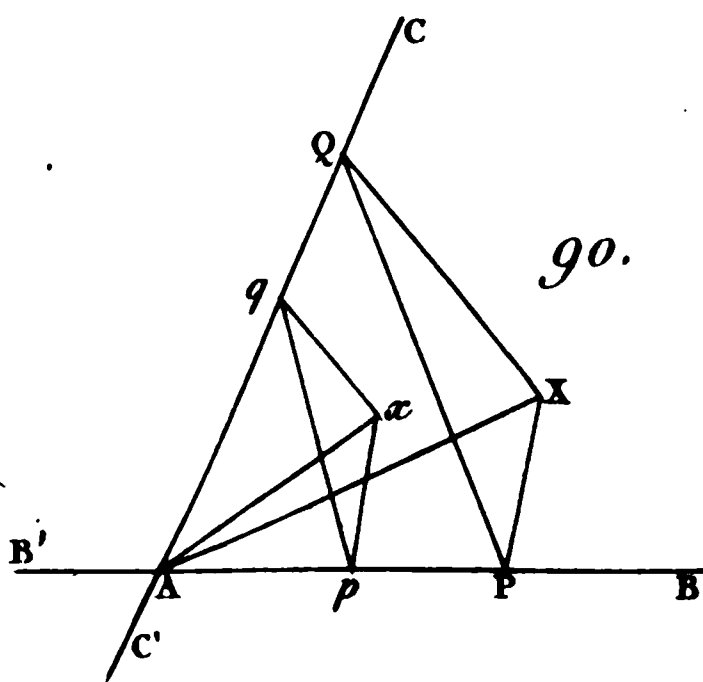
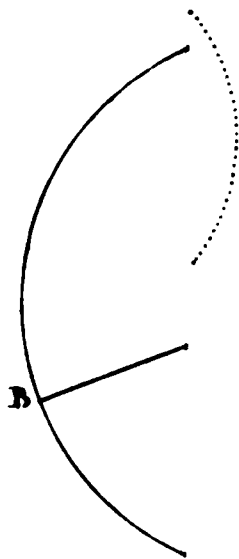
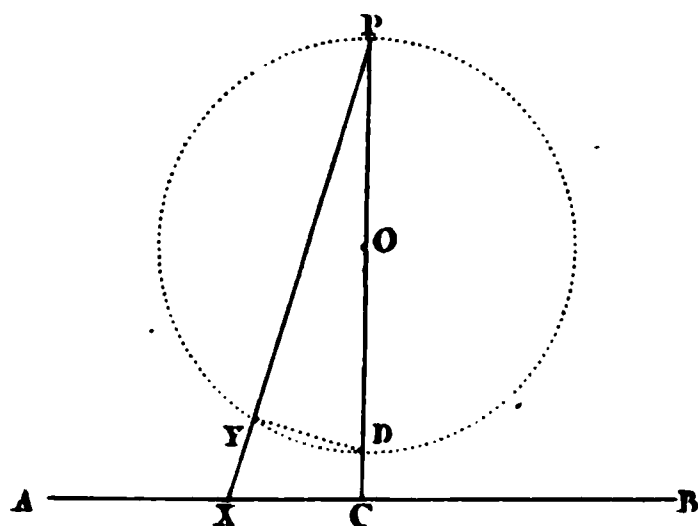
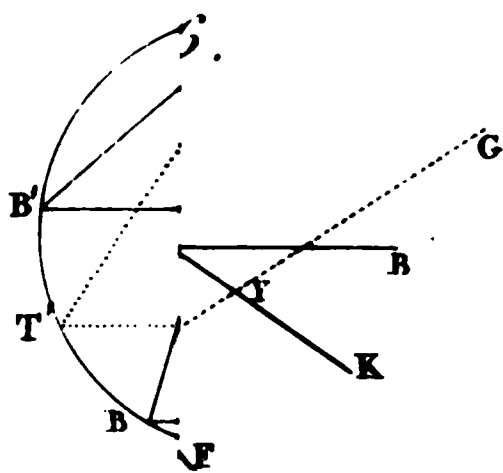








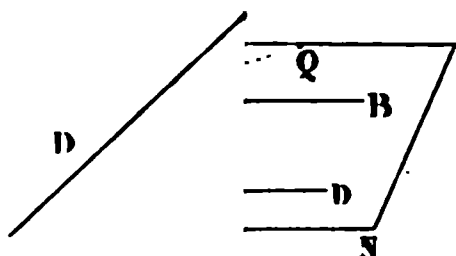
87.



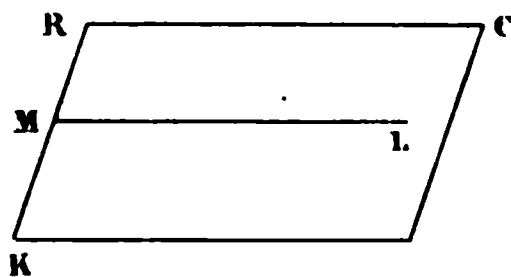


9

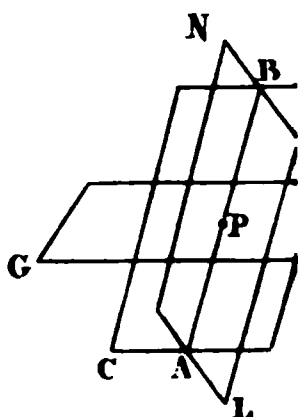
102.



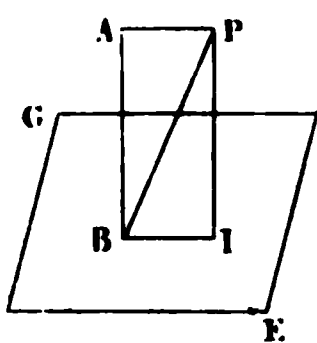
103.



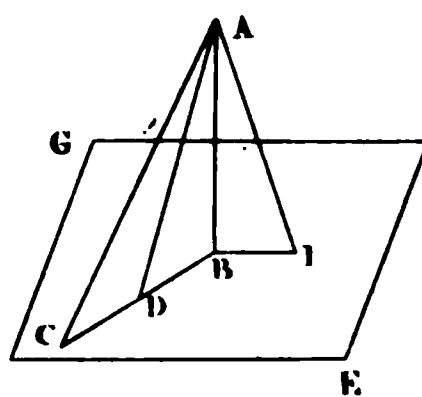
104.



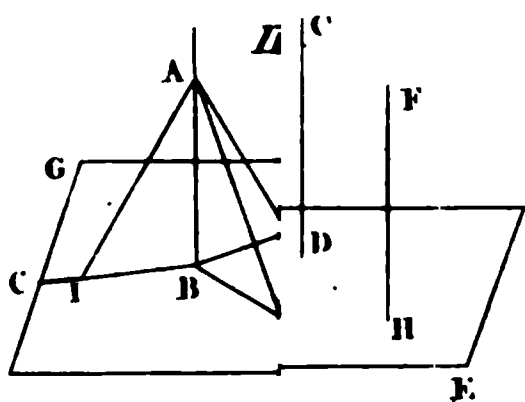
109.



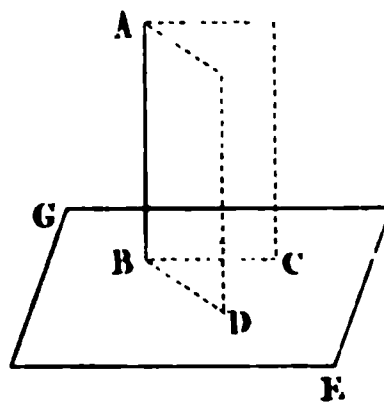
110.



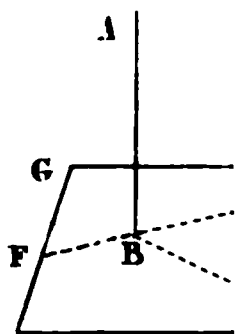
111.



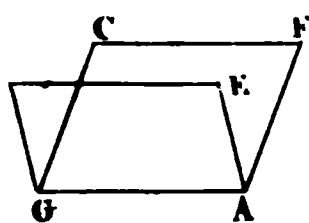
116.



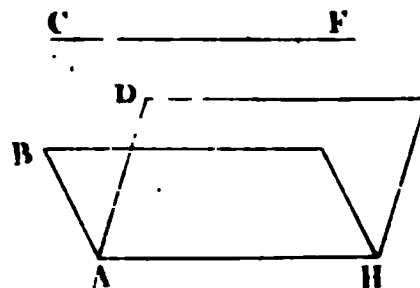
117



122.

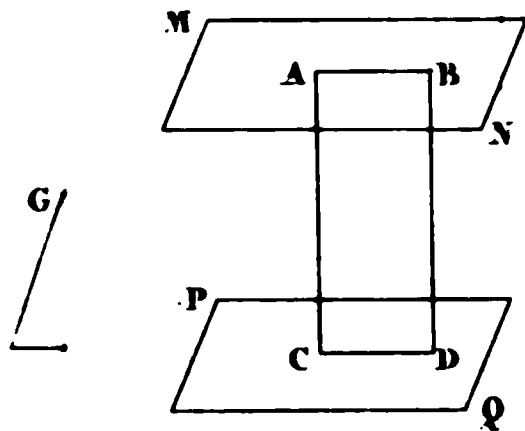


123.

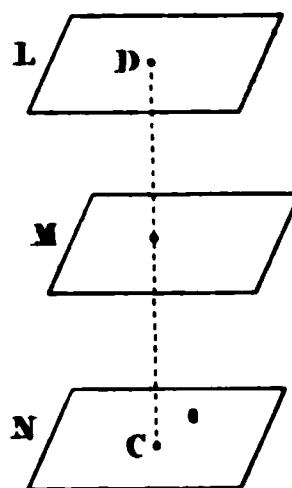




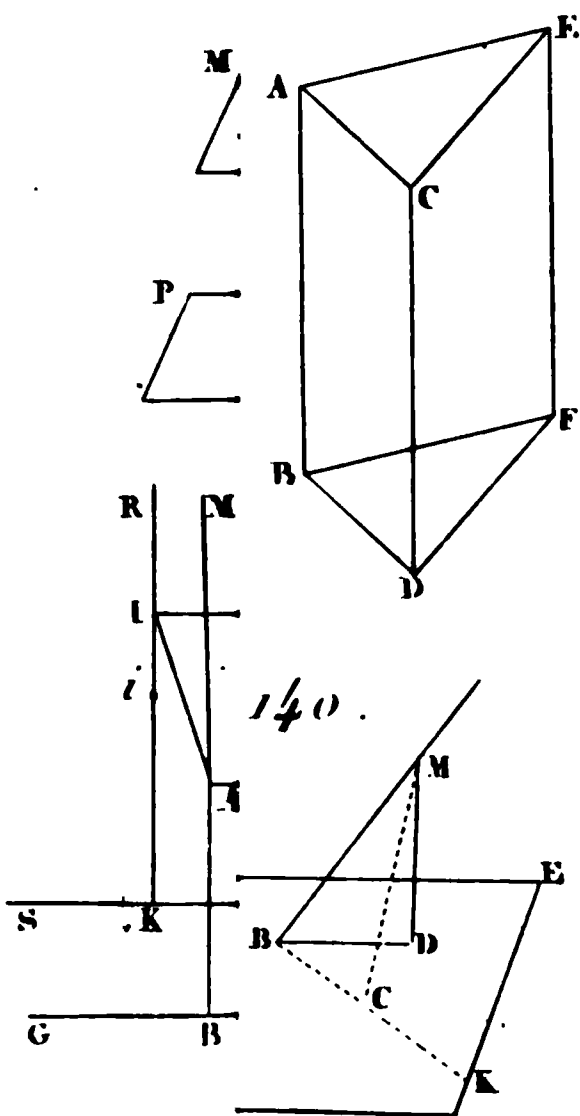
128.



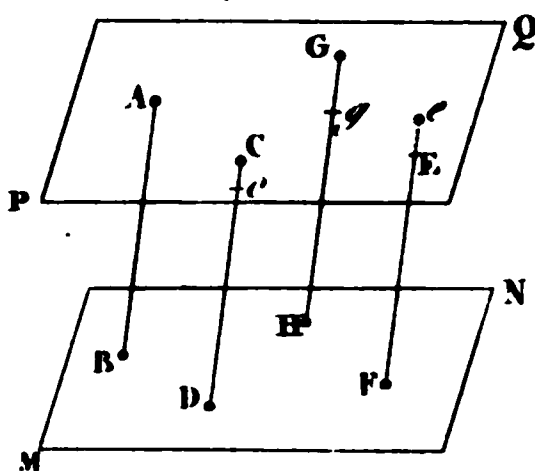
129.



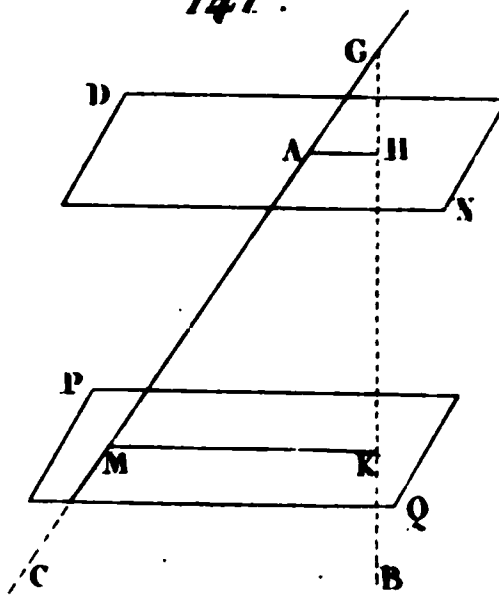
134.



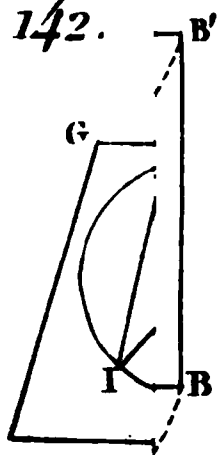
135.



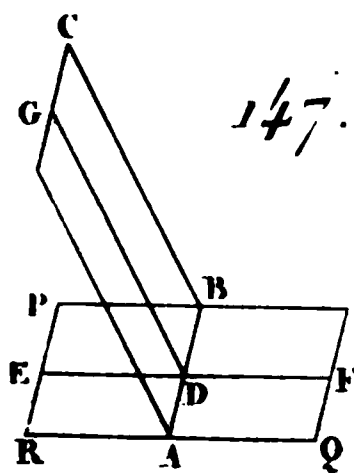
141.



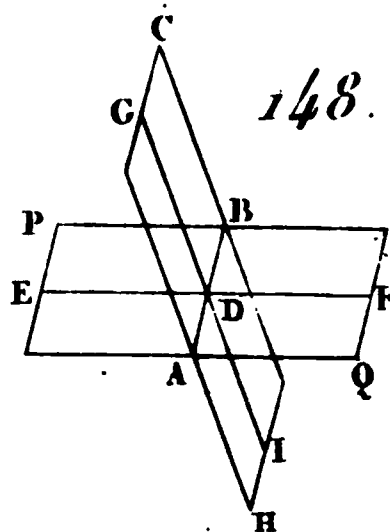
142.



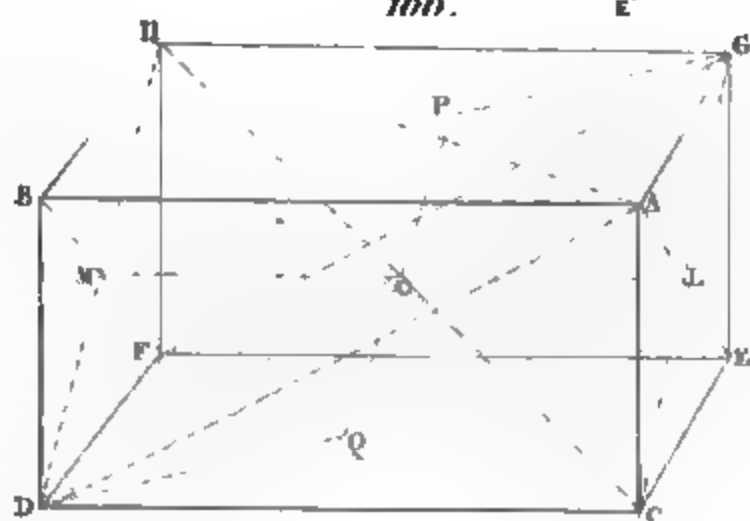
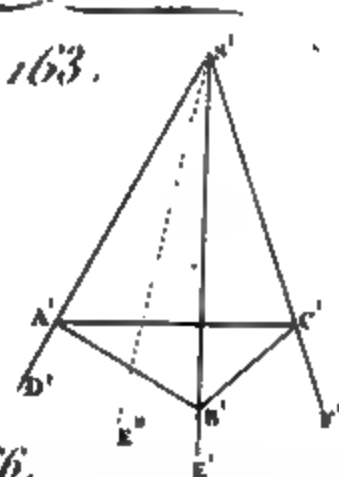
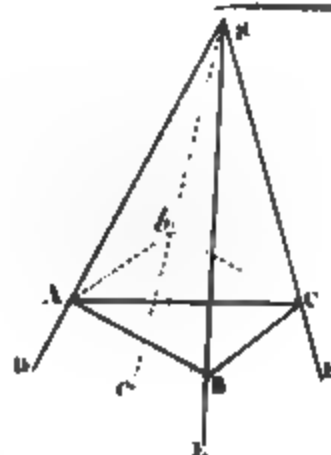
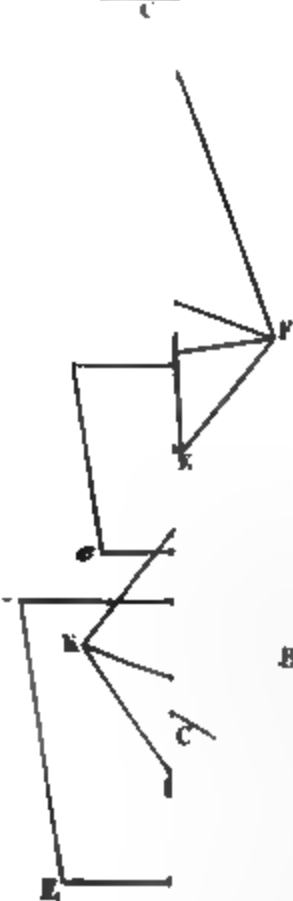
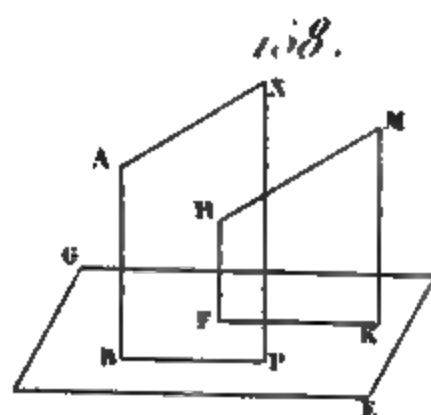
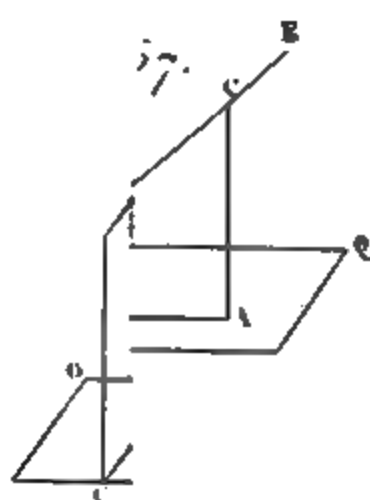
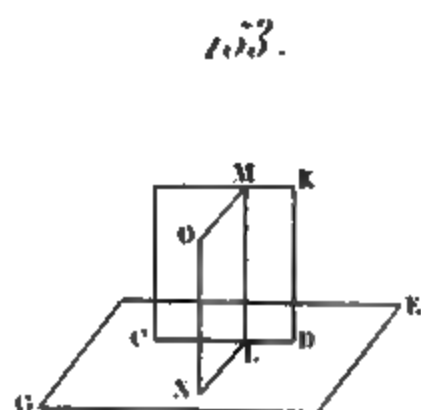
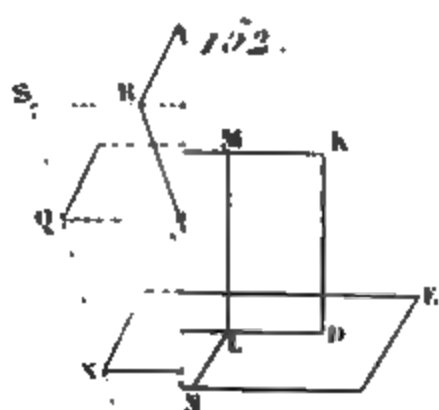
147.



148.

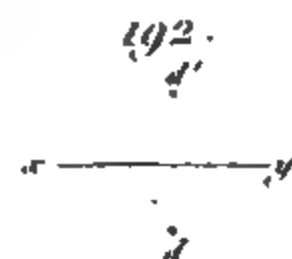
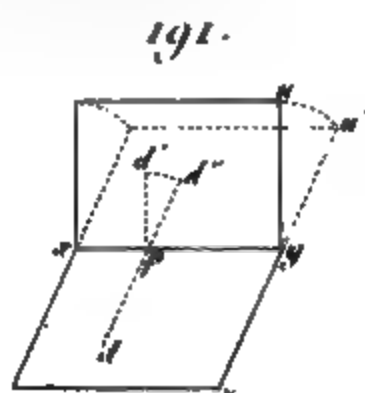
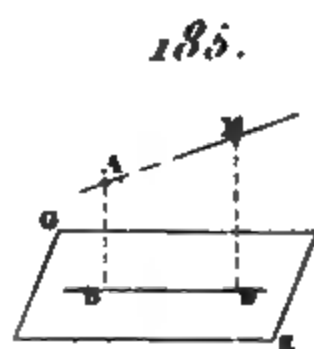
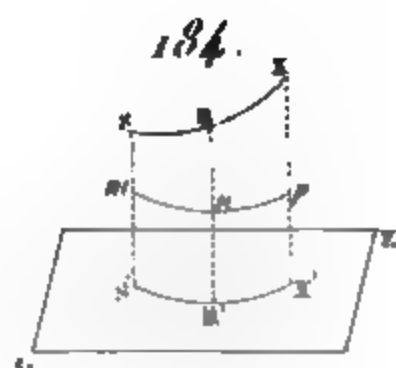
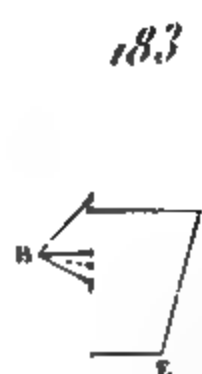
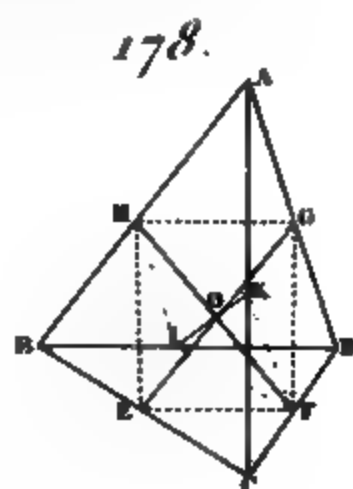
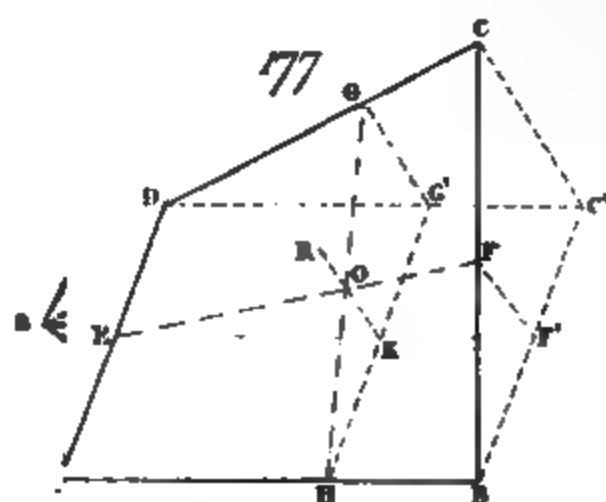
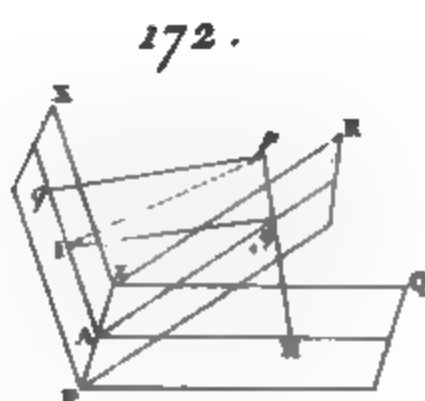
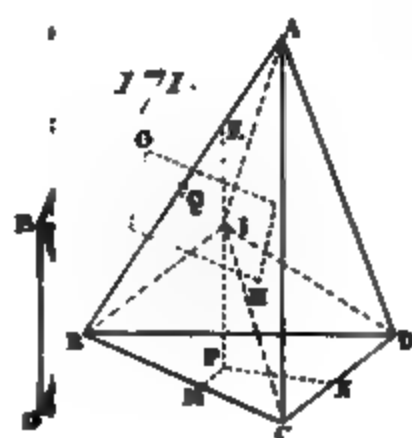






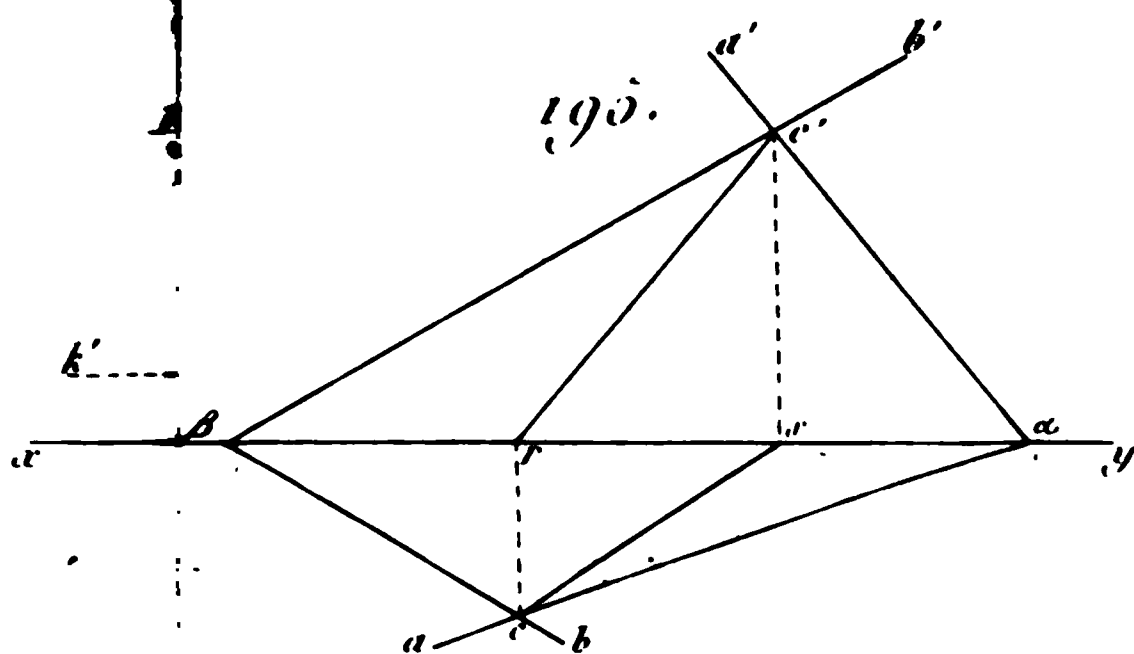




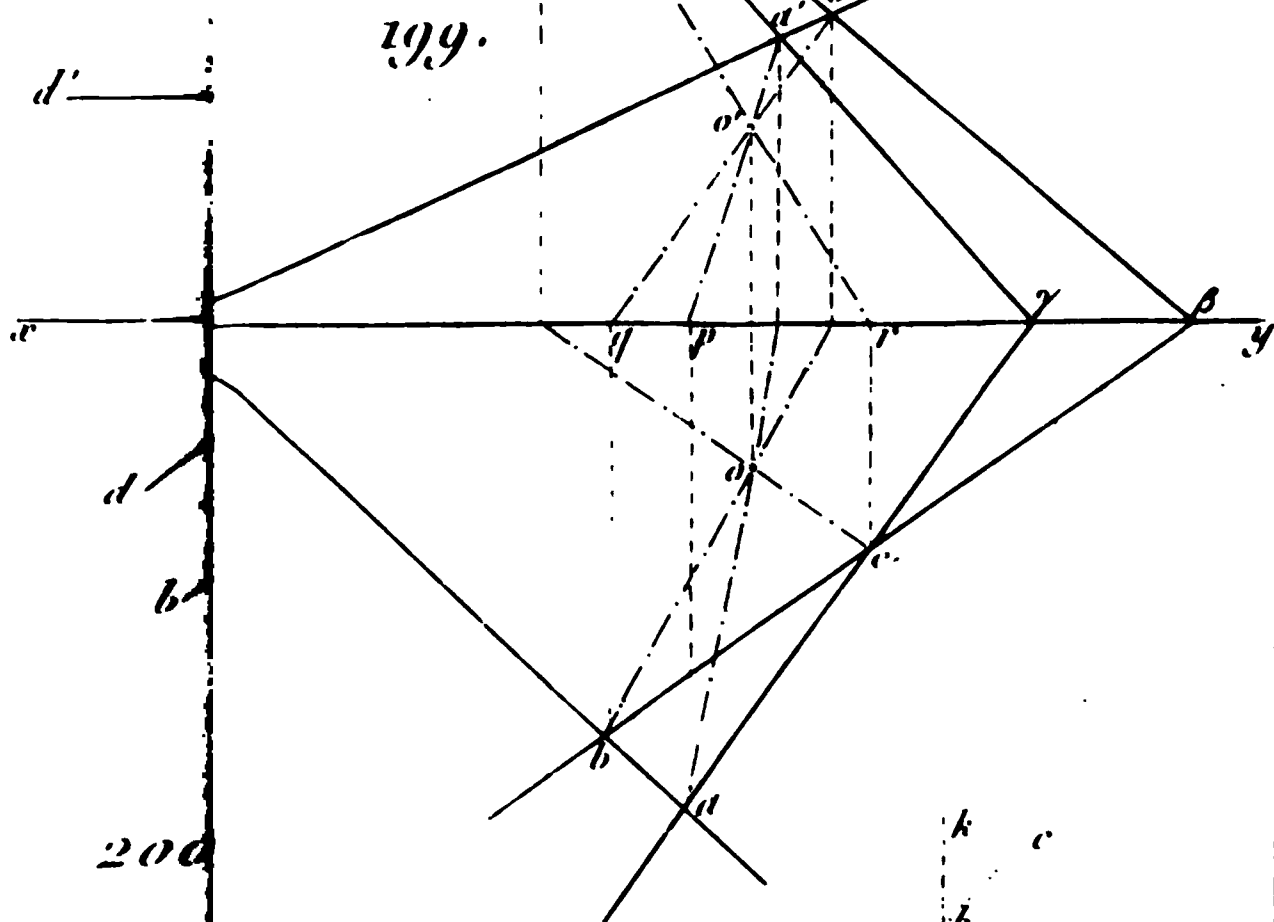




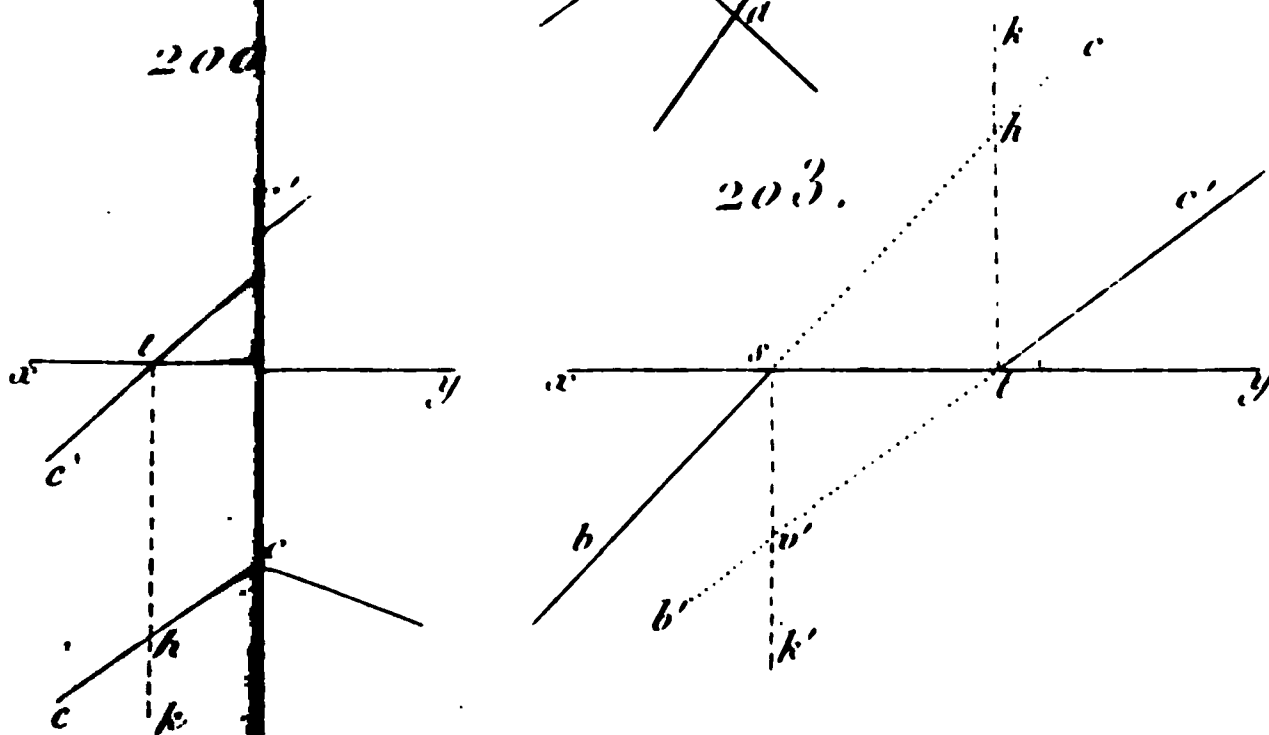
195.



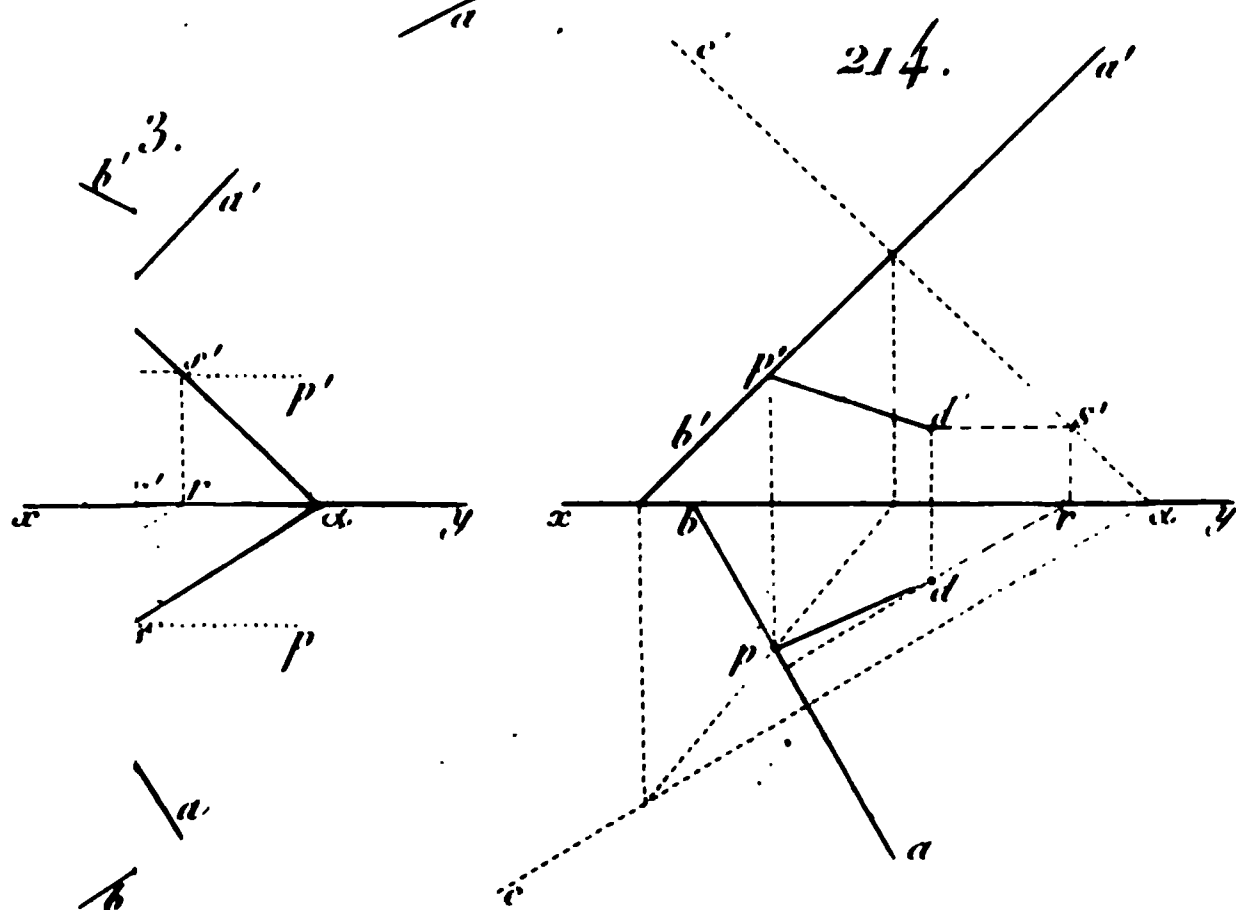
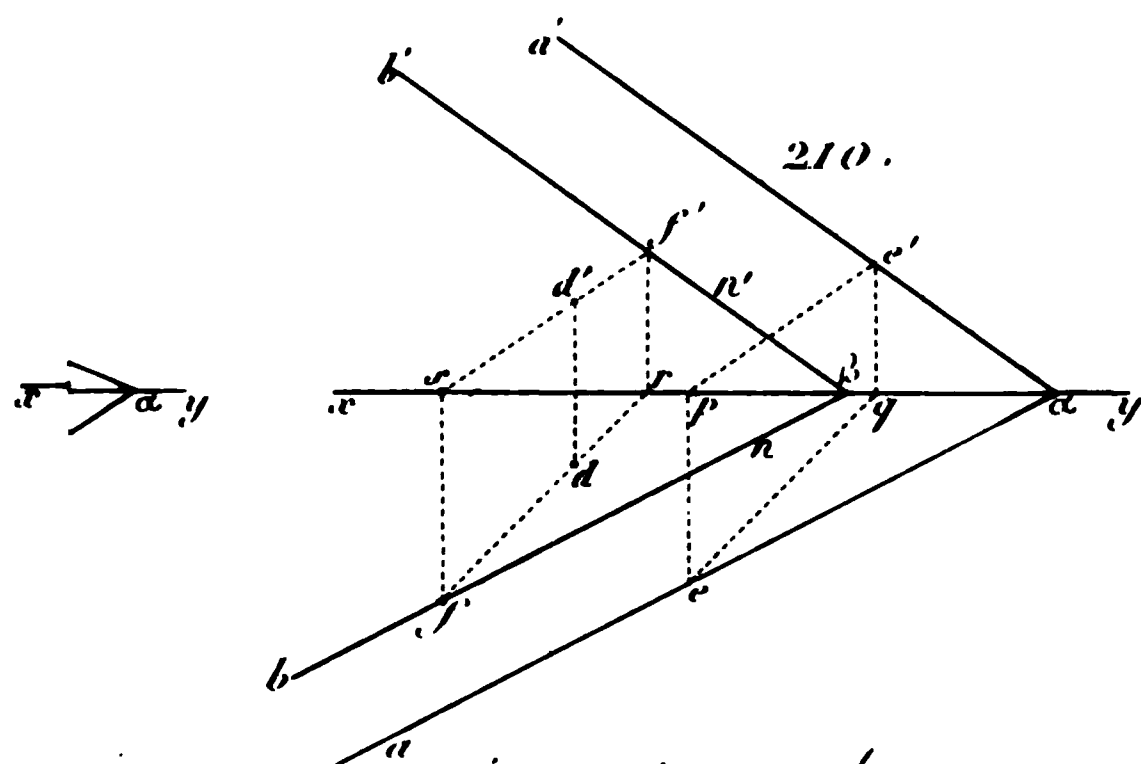
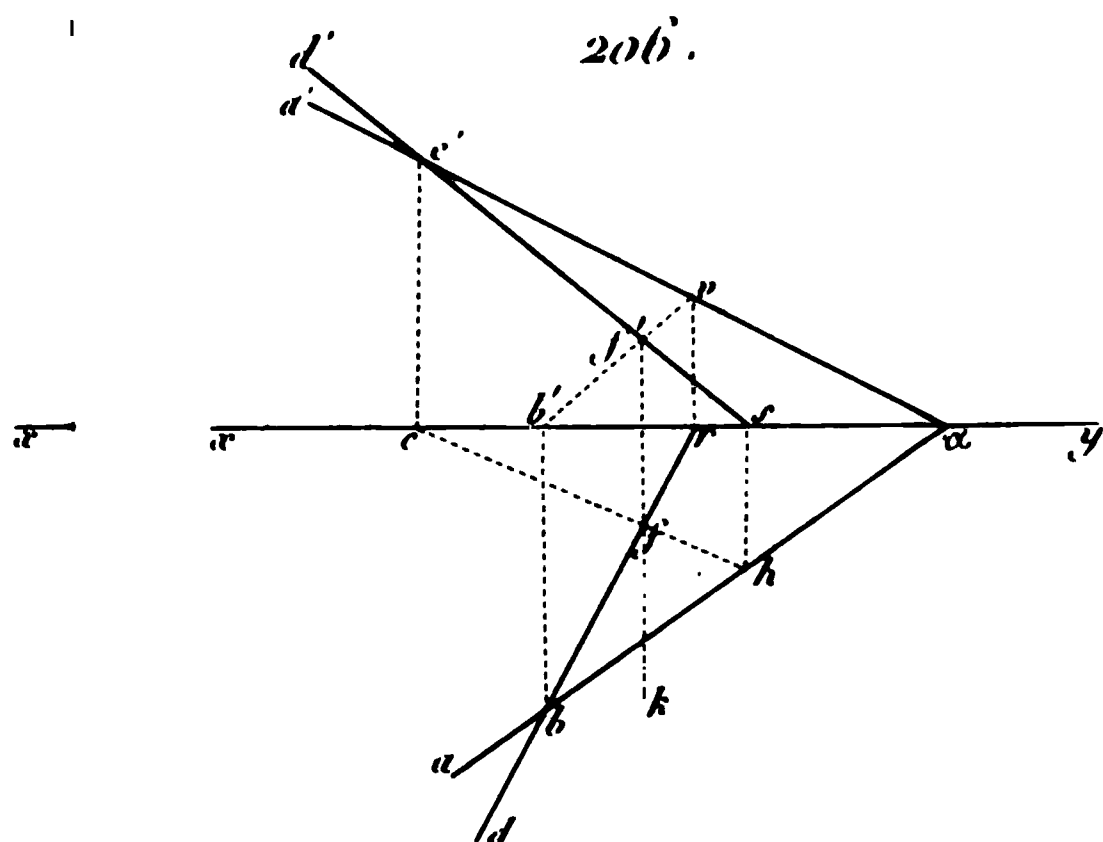
196.



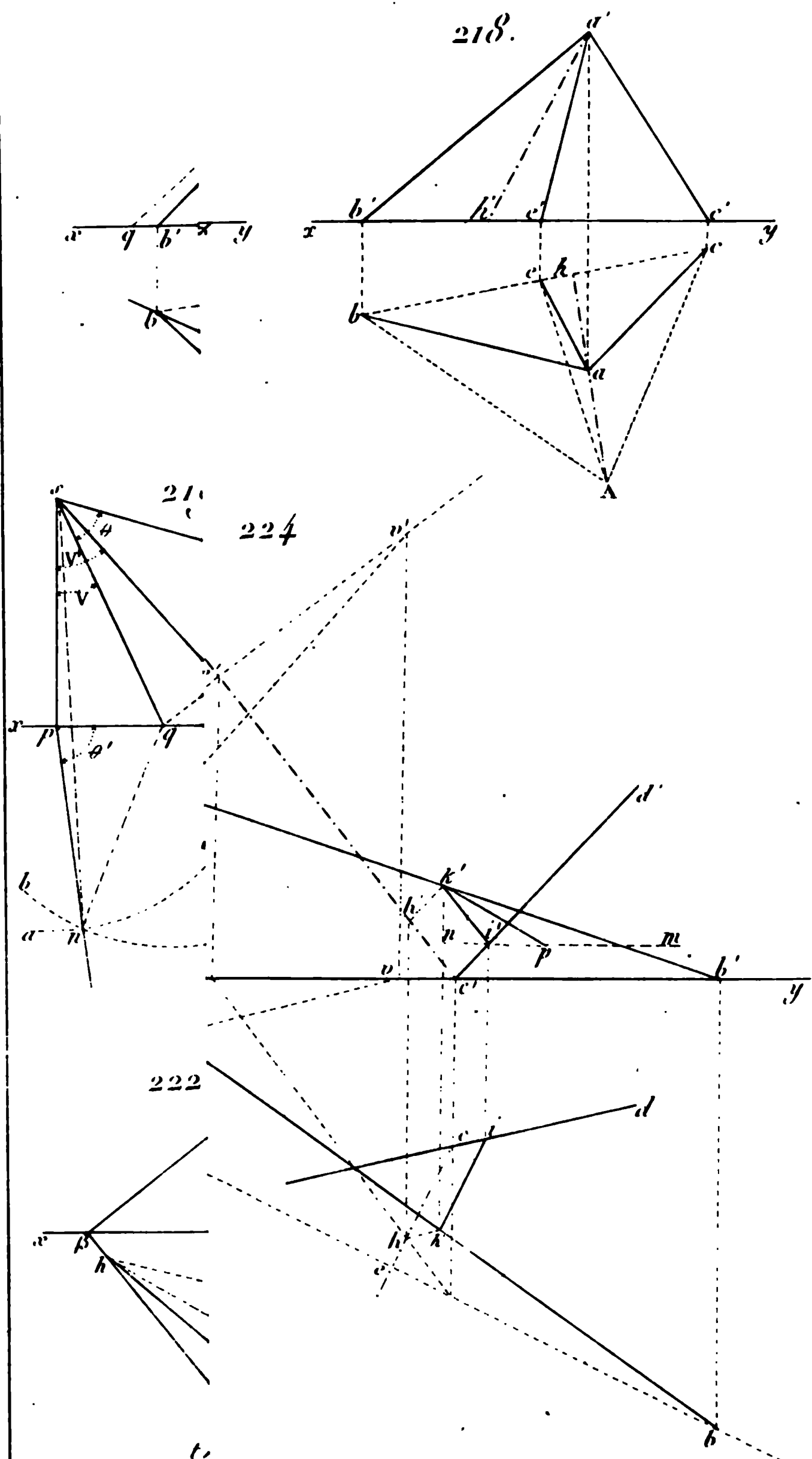
203.







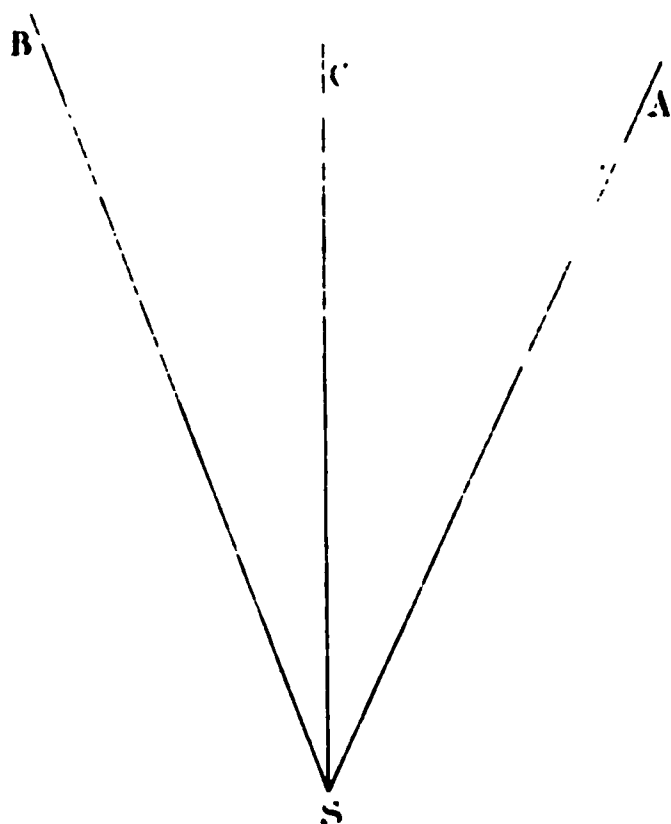
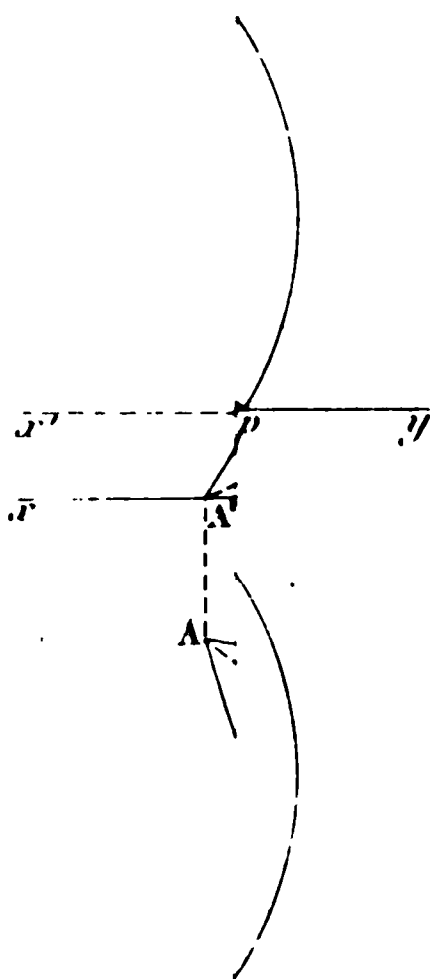




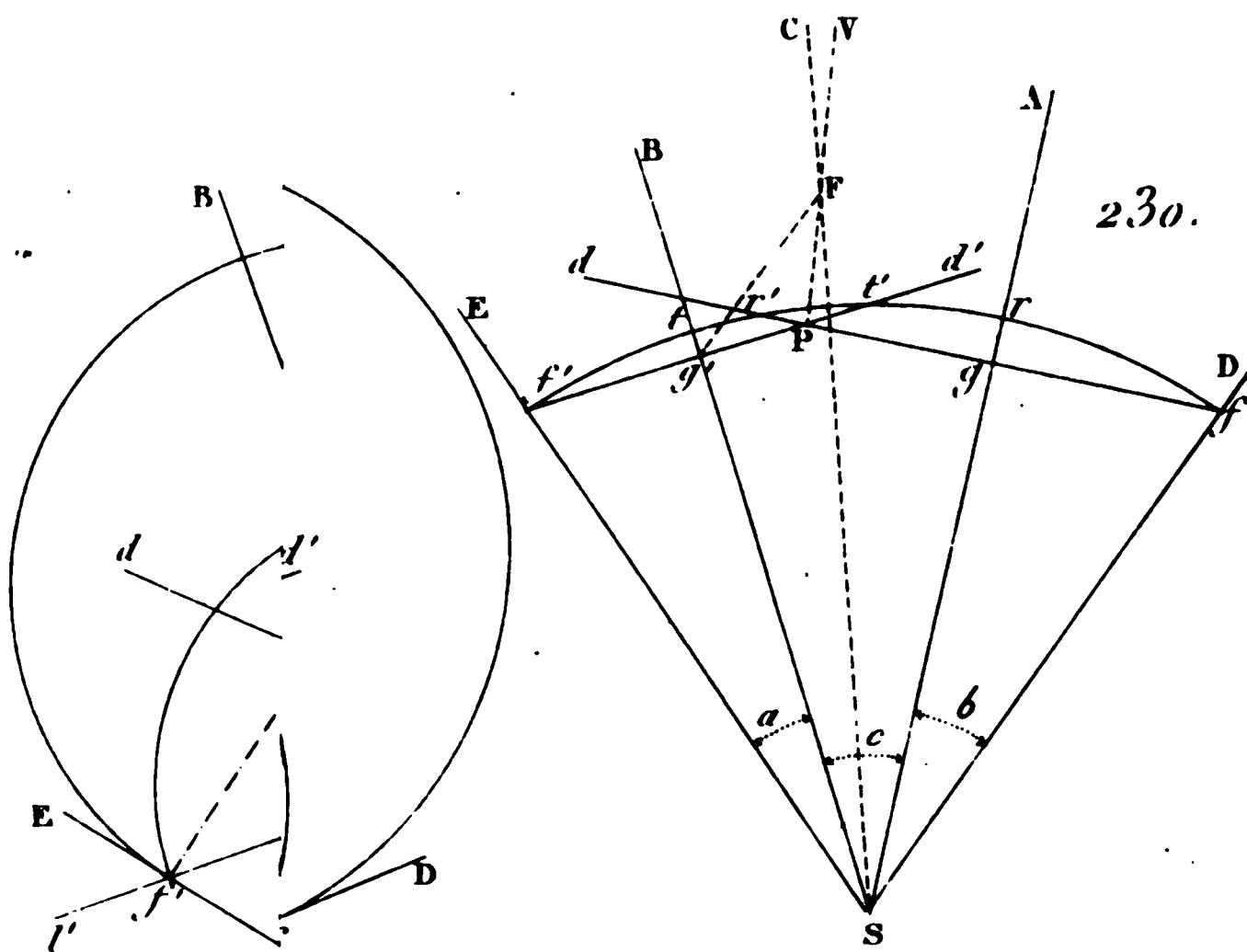




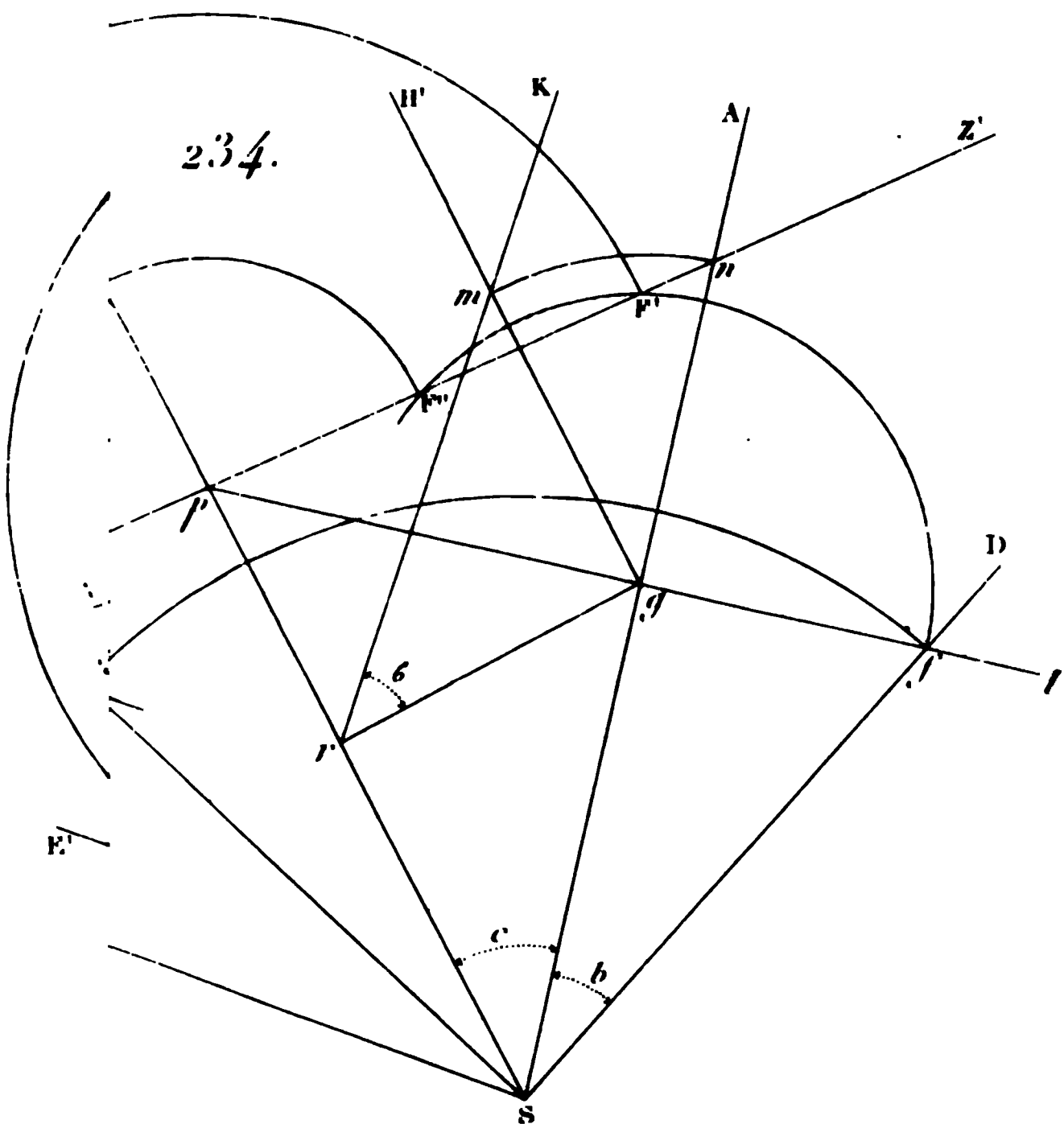
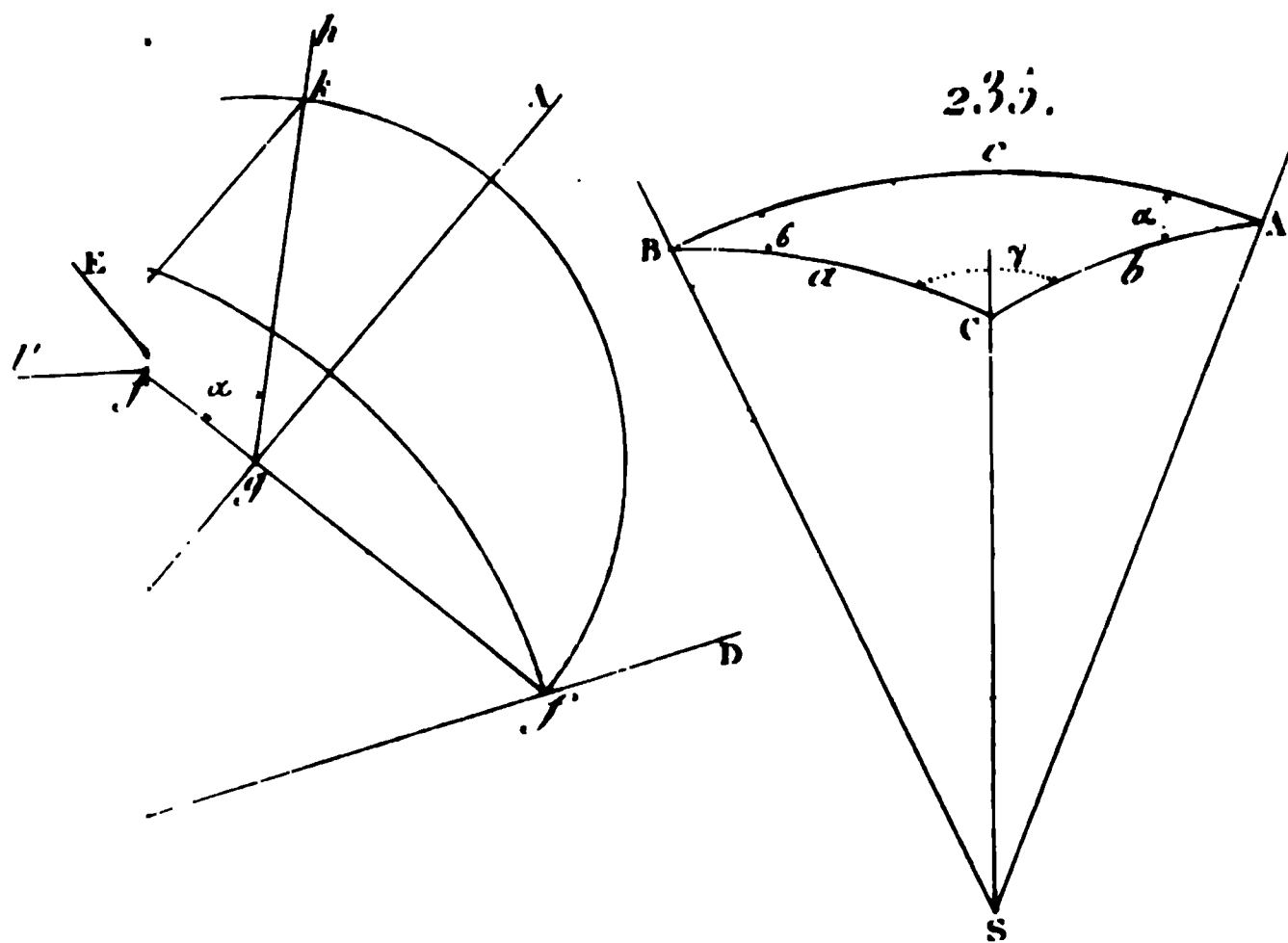
227.



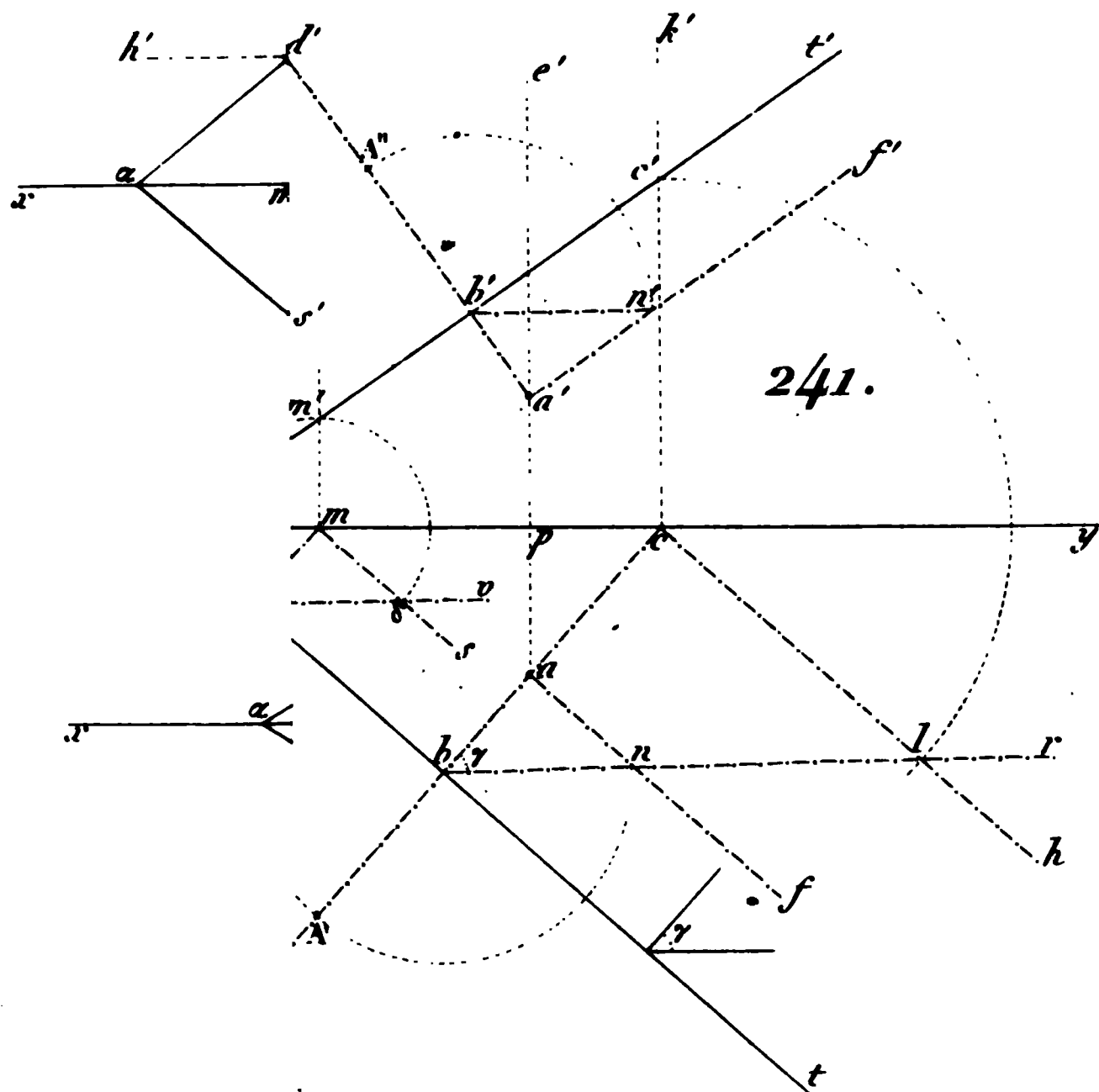
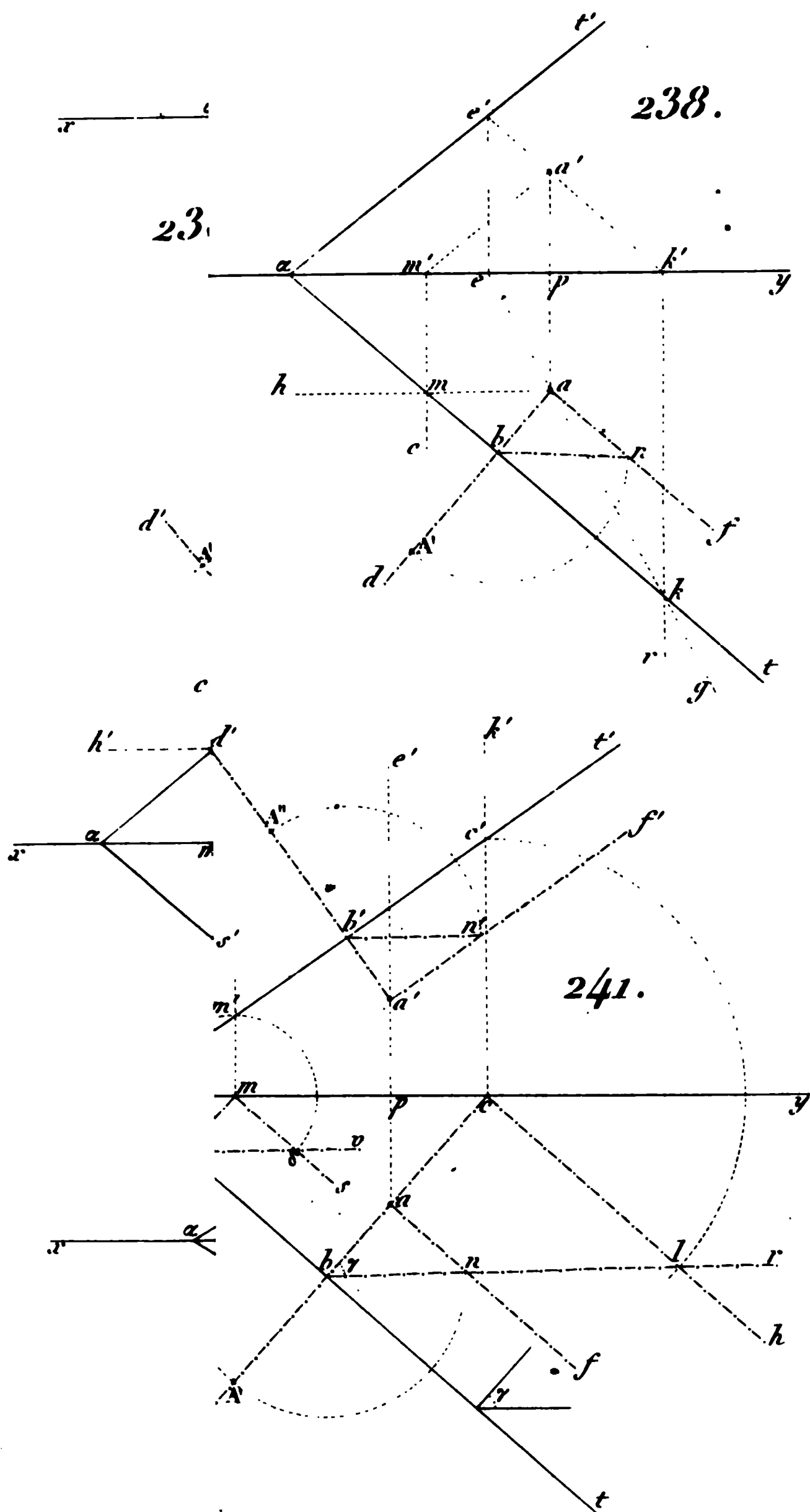
230.











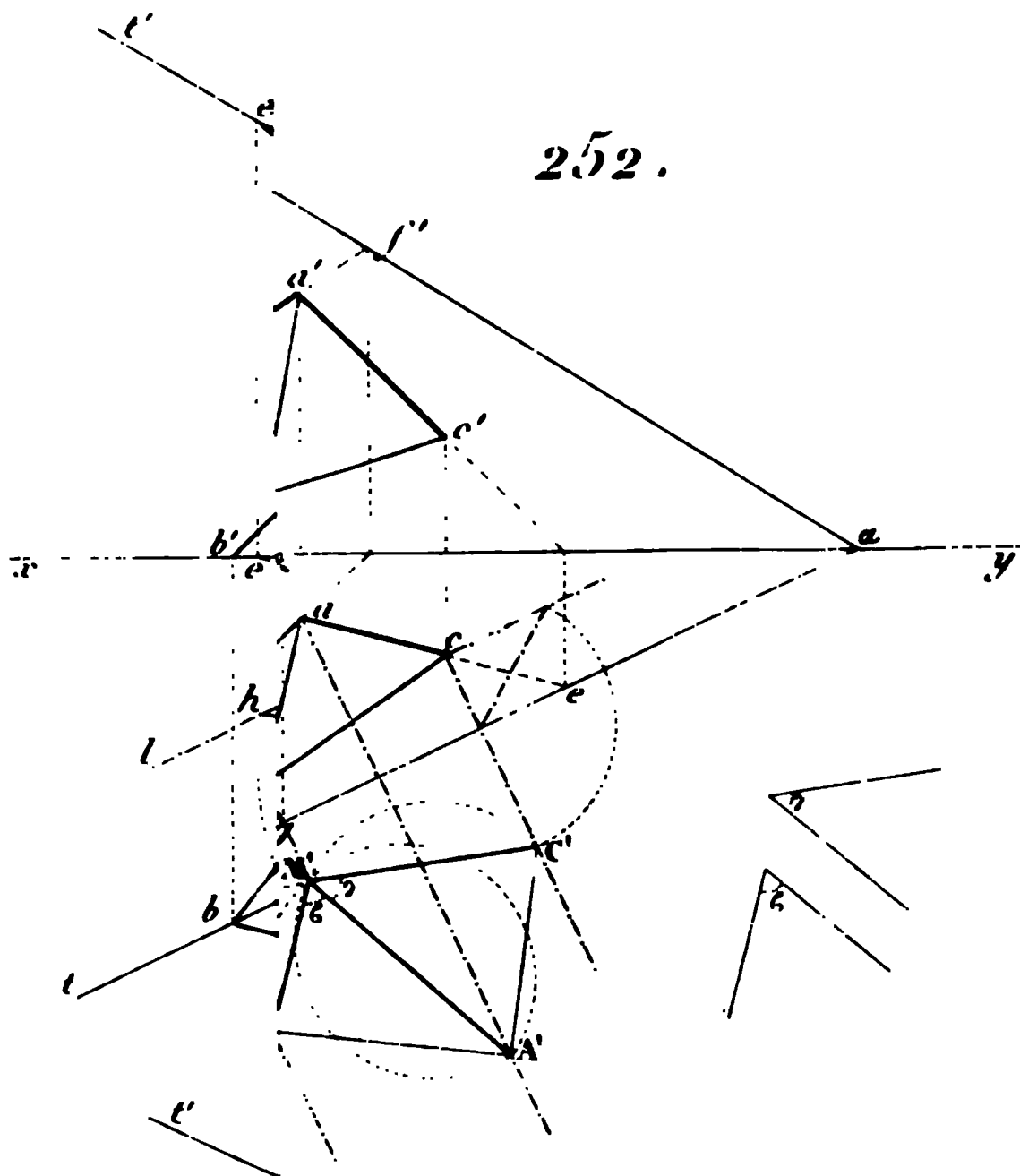




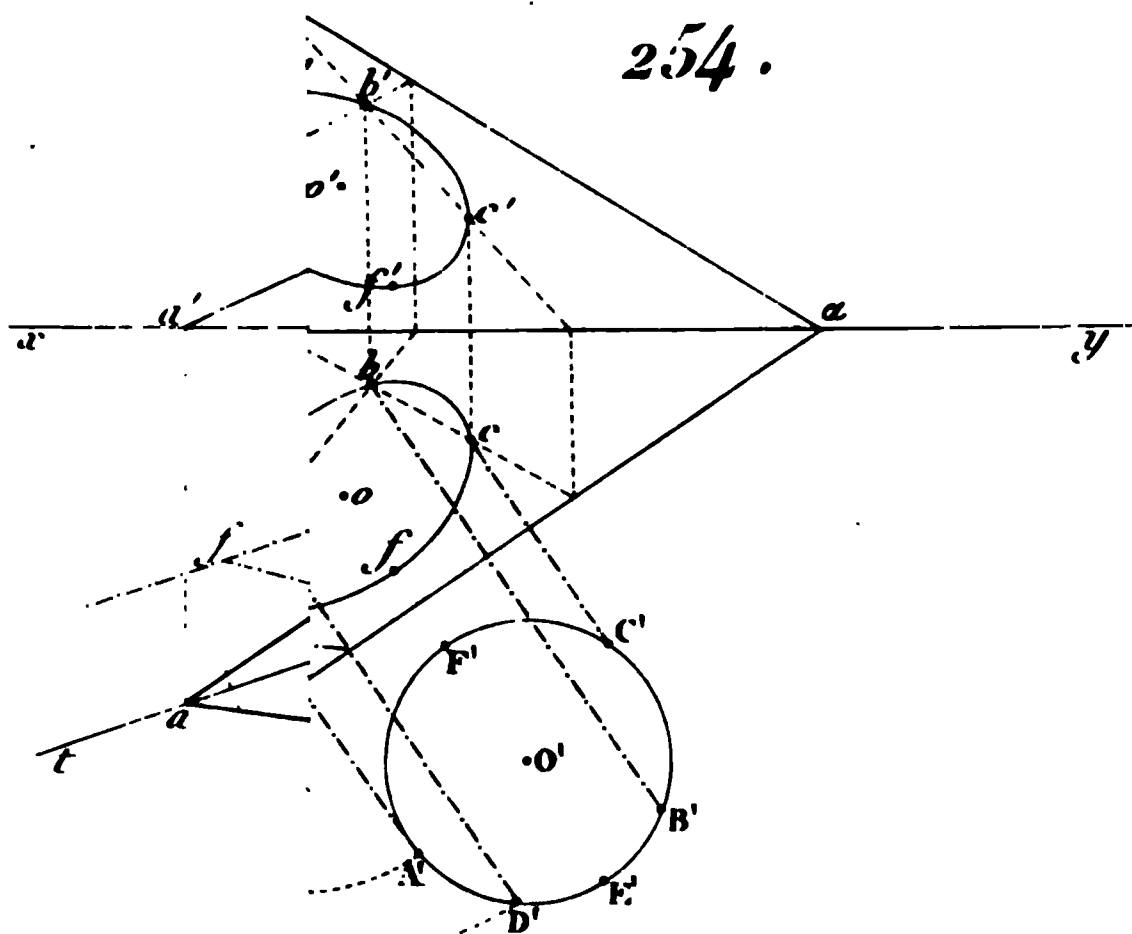




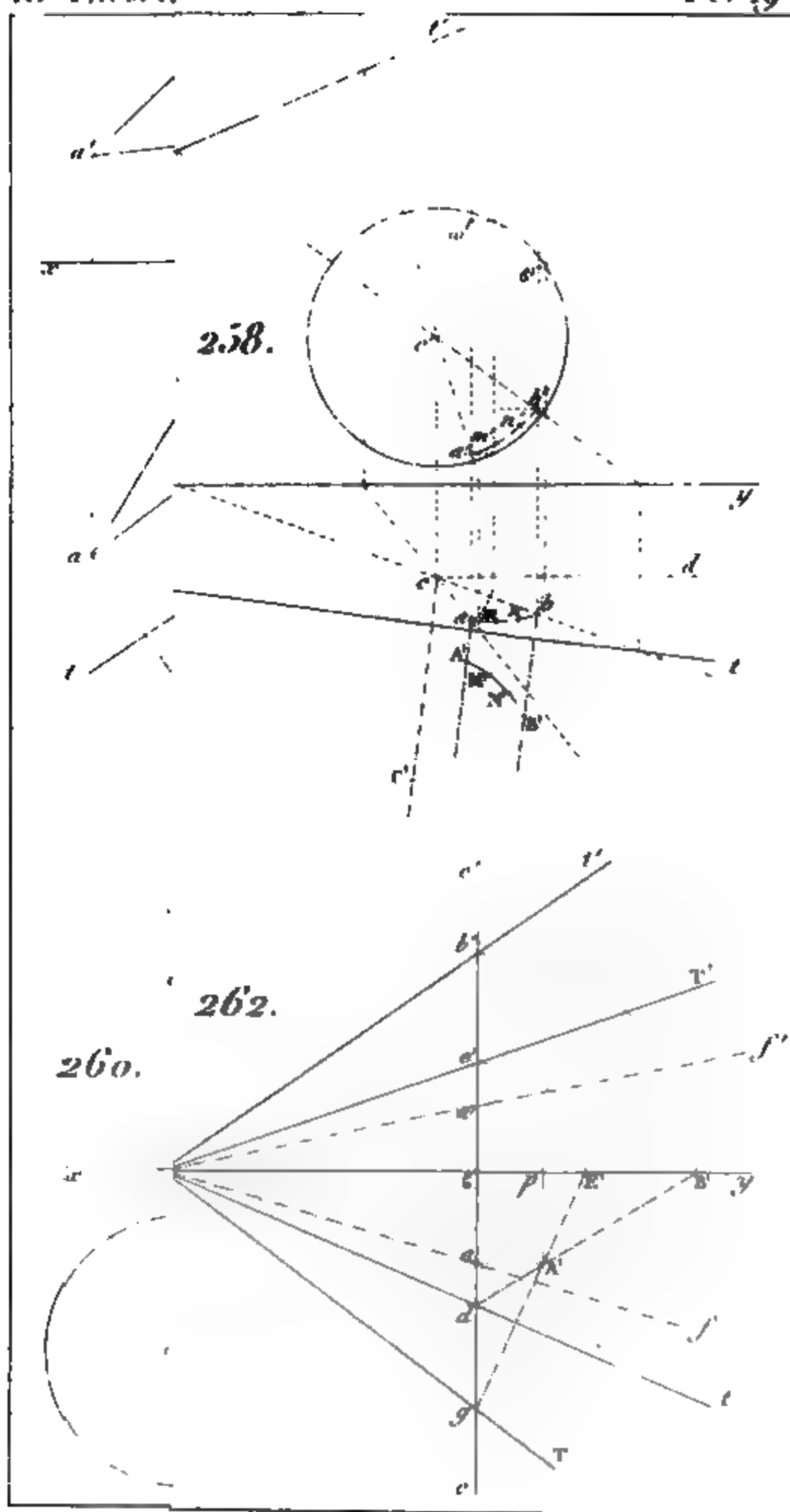
**252.**



254 .







Dessiné par M. de

Grand par Duran



263.5.

